Espaces de Sobolev

Délires Soboleviens.

Exercice 1. Déterminer pour quelles valeurs de α la fonction $x \longmapsto \left(-\ln\left(\|x\|^2\right)\right)^\alpha$ appartient à $\mathrm{H}^1(B_{1/2}(0))$ où $B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ est la boule de centre 0 et de rayon 1/2.

A toutes fins utiles, on rappelle le résultat suivant de convergence faible :

> **Proposition.** *Soit u_n une suite bornée de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ qui* **converge faiblement** *dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, au sens où il existe $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ telle que*
>
> $$\forall \varphi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d), \qquad \int_{\mathbb{R}^d} u_{\varphi(n)} \varphi \, dx \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} u \varphi \, dx.$$

Exercice 2 (Caractérisation de $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$). Montrer que $u \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

1. $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$
2. il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^d, \quad \|u(\cdot + h) - u\|_{\mathrm{L}^2} \leq M \|h\|.$$

Exercice 3. Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que chaque $u \in \mathrm{H}^1(I)$ admet un unique représentant (au sens p.p.) dans $\mathcal{C}^{1/2}(\overline{I})$.
2. Montrer que l'injection $\mathrm{H}^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{I})$ est continue. *On utilisera le théorème du graphe fermé.*
3. En identifiant les éléments de $\mathrm{H}^1(I)$ à leurs représentants continus, montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :
$$\forall u \in \mathrm{H}^1(I), \quad \|u\|_\infty \leq C \|u\|_{\mathrm{H}^1}.$$
puis qu'il existe $C' > 0$ tel que
$$\forall u \in \mathrm{H}^1(I), \quad \|u\|_{\mathcal{C}^{1/2}(\overline{I})} := \|u\|_\infty + \sup_{x \neq y} \left(\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} \right) \leq C' \|u\|_{\mathrm{H}^1}.$$
4. En déduire que l'injection $\mathrm{H}^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{I})$ est compacte.
5. En déduire que l'injection $\mathrm{H}^1(I) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(I)$ est compacte.

Ce résultat se généralise de la manière suivante (la démonstration est difficile) :

> **Théorème** (Théorème de Rellich). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier. Alors toute partie bornée de $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est relativement compacte dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$.*

Exercice 4 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert *connexe* borné régulier. On veut montrer qu'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall\, u \in \mathrm{H}^1(\Omega), \quad \|u - m(u)\|_{\mathrm{L}^2} \leq C\|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2},$$

avec $m(u) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$.

1. On travaillera par l'absurde. Montrer alors que l'on construire une suite $v_n \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ telle que $\|v_n\|_{\mathrm{L}^2} = 1$, $m(v_n) = 0$ et $\|\nabla v_n\|_{\mathrm{L}^2} \to 0$.
2. Justifier qu'à extraction près v_n converge fortement dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. On note v sa limite.
3. Justifier que v est constante presque partout.
4. Conclure.

En fait on peut traiter le gradient mieux que dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. L'exercice suivant est fondamental et devra devenir un réflexe chez vous.

Exercice 5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné régulier et u_n une suite bornée de $\mathrm{H}^1(\Omega)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ et $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ telle que :

- La suite $u_{\varphi(n)}$ converge <u>fortement</u> vers u dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$.
- La suite $\nabla u_{\varphi(n)}$ converge <u>faiblement</u> vers ∇u dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$.

Exercice 6. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné régulier et $\Gamma \subset \partial\Omega$ ouvert non vide. On définit :

$$V = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \mid u_{|\Gamma} = 0\}.$$

Montrer que $u \longmapsto \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2}$ est une norme sur V équivalente à $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1}$.

Exercice 7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine régulier. Soient $u,\ v \in \mathrm{H}^1(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega)$. Montrer que $uv \in \mathrm{H}^1(\Omega) \cap \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et préciser la valeur de $\nabla(uv)$.

Exercice 8. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine régulier et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et Lipschitzienne. Dans le cas où Ω est non borné, on supposera de plus que $f(0) = 0$.

1. Pour $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$, montrer que $f \circ u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ et préciser la valeur de $\nabla(f \circ u)$.
2. Démontrer la continuité de l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{H}^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\Omega) \\ & u & \longmapsto & f \circ u. \end{array}$$

3. Dans le cas où Ω est borné, montrer que φ est faiblement continue.