
Équations elliptiques

Du "Lax-Milgram" en veux-tu en voilà!

Exercice 1. On considère le problème suivant

$$-\Delta u + u = f \text{ sur } \mathbb{R}^d,$$

avec $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

1. Qu'est ce qu'une solution faible ? Dans quel espace fonctionnel ?
2. Montrer qu'il existe une unique solution faible.

L'énoncé qui généralise la résolution du problème de Laplacien est le suivant:

Théorème (Théorème de Lax-Milgram)**.** *Soit* $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *une forme* **bilinéaire**, **continue** *et* **coercive** *sur un espace de* **Hilbert** $\mathcal{H}$ *et soit* L *une forme* **linéaire** **continue** *sur* $\mathcal{H}$*. Alors, il existe un élément* u *et un seul de* $\mathcal{H}$ *tel que*

$$\forall v \in \mathcal{H}, \qquad a(u, v) = \mathrm{L}(v)\,.$$

Si on suppose de plus que la forme a *est* **symétrique**, *alors l'élément* u *est caractérisé comme étant l'unique élément de* $\mathcal{H}$ *qui minimise la fonctionnelle*

$$J(v) := \frac{1}{2}\,a(v, v) - \mathrm{L}(v)\,.$$

Exercice 2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné régulier. Soient $c \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $B \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^d$ et $A \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)^{d\times d}$. On suppose que A est uniformément définie positive dans Ω dans le sens que :

$$\exists \alpha > 0, \text{ p.p. } x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \alpha \|\xi\|^2.$$

On suppose que $c \geq 0$ et que $\mathrm{div}(B) = 0$.

1. Soit $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ du problème de Dirichlet suivant:
$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A\nabla u + Bu) + cu = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$
2. Montrer que si $f \leq 0$ alors $u \leq 0$.
3. On suppose qu'il existe $\gamma > 0$ et $M \geq 0$ tels que $c \geq \gamma$ et $f \leq M$. Montrer que $u \leq \frac{M}{\gamma}$.

Exercice 3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné régulier. On considère le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} -\nabla\cdot(A\nabla u) - \nabla\cdot(Bu) + cu = f, & x\in\Omega,\\ (A\nabla u + Bu)\cdot n = 0, & x\in\partial\Omega. \end{cases}$$

Donner des conditions suffisantes sur A, B et c et un espace fonctionnel pour lesquels il existe une unique solution à (P).

Régularité elliptique

Exercice 4. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ domaine et soit $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de l'équation

$$-\Delta u = f,$$

où $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$. On traite d'abord le cas "sans bord".

1. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$, montrer que $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$.
2. En déduire que $u \in \mathrm{H}^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ dans le cas où Ω est général.

On traite maintenant le cas "avec bord". On suppose alors de plus que $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

3. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}^+_*$, montrer que $\partial_i\nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ pour tout $i = 1,\dots,d-1$. Déduire de l'équation que $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$.
4. Dans le cas où Ω est général (mais borné et régulier!), proposer une méthode pour montrer que $u \in \mathrm{H}^2(\Omega)$.