
Estudio numérico de ecuaciones elípticas

Exercice 1. On s'intéresse à la résolution numérique du problème elliptique suivant en dimension 1 d'espace:

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in]0,1[, \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{cases}$$

où $c,\ f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ et $c \geq 0$. On admettra que ce problème admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$.

On choisit $N \in \mathbb{N}$ grand et on pose $h = \frac{1}{N+1}$ le pas de discrétisation de l'intervalle $[0,1]$. Pour tout $i = 0, \ldots, N+1$, on définit

$$x_i = ih, \qquad c_i = c(x_i), \qquad u_i = u(x_i), \qquad f_i = f(x_i).$$

Première partie: Etude théorique.

1. Montrer que pour tout $i = 1, \ldots, N$, il existe $\theta_i^h \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$ tel que :

$$-u''(x_i) = \frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} + \frac{h^2}{12} u^{(4)}(\theta_i^h).$$

2. En déduire l'égalité suivante :

$$\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2+c_2h^2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2+c_{N-1}h^2 & -1 \\ & & & -1 & 2+c_Nh^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1 + \dfrac{\alpha}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N + \dfrac{\beta}{h^2} \end{pmatrix} - \frac{h^2}{12}\begin{pmatrix} u^{(4)}(\theta_1^h) \\ u^{(4)}(\theta_2^h) \\ \vdots \\ u^{(4)}(\theta_{N-1}^h) \\ u^{(4)}(\theta_N^h) \end{pmatrix}.$$

Nous écrirons cette égalité comme suit :

$$A^h u^h = f^h + \varepsilon^h.$$

Comme nous avons $\varepsilon^h \to 0$ lorsque $h \to 0$, nous nous intéressons au schéma numérique donné par :

$$A^h \varphi^h = f^h,$$

où $\varphi^h = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)^t$ sera une approximation de u^h.

L'objectif de cet exercice est de montrer que $\varphi^h - u^h \longrightarrow 0$ lorsque $h \to 0$ et que le schéma converge à l'ordre 2.

3. *Intermède : Matrices monotones.* Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite monotone si elle est inversible et si son inverse est à coefficients positifs.

   (a) Montrer que M est une matrice monotone si et seulement si
   $$\forall v \in \mathbb{R}^n, \qquad Mv \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v \geq 0.$$

   (b) Montrer que A^h est monotone. On condérera $v \in \mathbb{R}^N$ tel que $A^h v \geq 0$ et on s'intéressera au terme v_p où $p \in \{1, \dots, N\}$ et $v_p = \min_{i=1,\dots,N} v_i$. *En particulier, A^h est inversible et donc le schéma numérique est bien défini.*

4. *Un cas particulier : $c = 0$.* On note B^h la matrice égale à A^h dans le cas où $c = 0$. On veut montrer que
   $$\|(B^h)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{8}.$$

   (a) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs, montrer que $\|M\|_\infty = \|Me\|_\infty$ où $e = (1, \dots, 1)$.

   (b) On note $\psi^h = (B^h)^{-1}e$. De quel problème continu ψ^h est-il la solution approchée?

   (c) En résolvant ce problème simple, montrer le résultat voulu.

5. Déduire de l'égalité $(B^h)^{-1} - (A^h)^{-1} = (B^h)^{-1}(A^h - B^h)(A^h)^{-1}$ que $\|(A^h)^{-1}\|_\infty \leq \dfrac{1}{8}$.

6. Finalement, déduire de ce dernier résultat que notre schéma numérique est convergent d'ordre 2 au sens suivant :
   $$\|u^h - \varphi^h\|_\infty \leq \frac{h^2}{96}\|u^{(4)}\|_\infty.$$

Deuxième partie: Etude pratique.

1. Dans le cas où $f(t) = (1 + 2t - t^2)e^t$, $c(t) = t$ et $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, vérifier que la solution exacte est donnée par $u(t) = (1 - t)e^t$.

2. Implémenter le schéma numérique sur cet exemple et calculer l'erreur $\|u^h - \varphi^h\|_\infty$ pour différents pas h. Attention ! La matrice A^h est tridiagonale et creuse ! Il est impératif de la programmer comme telle (voir les fonctions *ones*, *sparse* et *diag* de Scilab). Penser à proposer la représentation graphique des solutions exacte et approchée. Penser à la légende, titre, etc.

3. Représenter l'erreur logarithmique sur un graphique en échelle 'loglog' et retrouver l'ordre de convergence obtenu ci-dessus. Pour éclairer le graph logarithmique, on pourra tracer deux droites de pentes bien choisies aux côtés de la courbe d'erreur logarithmique.

Exercice 2. On s'intéresse à la discrétisation du problème aux limites de Poisson (avec conditions mixtes Dirichlet-Neumann homogènes) suivant :
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), \qquad x \in]0, 1[, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) = \alpha. \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}^{\infty}([0,1])$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On admettra que ce problème admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^4([0,1],\mathbb{R})$.

On choisit $N \in \mathbb{N}$ grand et on pose $h = \frac{1}{N+1}$ le pas de discrétisation de l'intervalle $[0,1]$. Pour tout $i = 0,\dots,N+1$, on définit

$$x_i = ih, \qquad u_i = u(x_i), \qquad f_i = f(x_i).$$

et $\varphi^h = (\varphi_1,\dots,\varphi_{N+1})^t$ qui sera notre approximation de $u^h = (u_1,\dots,u_{N+1})^t$.

Attention, dans cet exercice, notre système matriciel sera de taille $N+1$ (et non plus N) car ici on ne dispose pas de valeurs de type Dirichlet à attribuer à φ_{N+1}.

Première partie: Etude théorique. La seule différence importante avec l'exercice précédent est le choix de la discrétisation de la condition de Neumann en $x = 1$. Autrement dit, nous allons imposer $\varphi_0 = 0$ et discrétiser l'équation de Poisson comme suit :

$$\frac{-\varphi_{i+1} + 2\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h^2} = f_i, \tag{1}$$

pour tout $i = 1,\dots,N$. Il reste à gérer la $(N+2)$-ème information correspondant à la condition de Neumann en $x = 1$.

- **Premier choix**. On discrétise naïvement $u'(1)$ de la façon suivante :

$$\alpha = u'(1) \simeq \frac{\varphi_{N+1} - \varphi_N}{h}.$$

1. Montrer que le système d'équations obtenu peut s'écrire $A^h\varphi^h = f^h$, où $A^h = \frac{1}{h^2}A$, avec A indépendante de h. Expliciter la matrice A^h et le vecteur f^h dans ce cas. On rappelle que A^h et f^h sont de taille $N+1$.
2. Montrer que $A^h u^h = f^h + \varepsilon^h$ avec

$$\varepsilon^h = \begin{pmatrix} -h^2 u^{(4)}(\theta_1^h)/12 \\ -h^2 u^{(4)}(\theta_2^h)/12 \\ \vdots \\ -h^2 u^{(4)}(\theta_N^h)/12 \\ h u^{(3)}(\theta_{N+1}^h)/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(1)/2 \end{pmatrix},$$

où $\theta_i^h \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$ pour tout $i = 1,\dots,N$ et $\theta_{N+1}^h \in]x_N, x_{N+1}[$.
3. En déduire que le schéma n'est pas consistant si $f(1) \neq 0$.

- **Deuxième choix**. Pour gagner en consistance, on peut essayer de discrétiser plus précisément (*i.e.* à l'ordre 1) la condition de Neumann en 1. On écrit alors

$$\alpha = u'(1) \simeq \frac{\varphi_{N+1} - \varphi_N}{h} - \frac{f(1)}{2}h.$$

1. Expliciter le vecteur f^h dans ce cas.
2. Montrer que $A^h u^h = f^h + \varepsilon^h$ avec

$$\varepsilon^h = \begin{pmatrix} -h^2 u^{(4)}(\theta_1^h)/12 \\ -h^2 u^{(4)}(\theta_2^h)/12 \\ \vdots \\ -h^2 u^{(4)}(\theta_N^h)/12 \\ h u^{(3)}(\theta_{N+1}^h)/6 \end{pmatrix},$$

   où $\theta_i^h \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$ pour tout $i = 1, \ldots, N$ et $\theta_{N+1}^h \in]x_N, x_{N+1}[$.
3. En déduire que le schéma est consistant d'ordre au moins 1.

Deuxième partie: Etude pratique.

1. Dans le cas où $f(t) = (1 + 2t - t^2)e^t$, $c(t) = t$ et $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, vérifier que la solution exacte est donnée par $u(t) = (1 - t)e^t$.

2. Implémenter le schéma numérique sur cet exemple et calculer l'erreur $\|u^h - \varphi^h\|_\infty$ pour différents pas h. Attention ! La matrice A^h est tridiagonale et creuse ! Il est impératif de la programmer comme telle (voir les fonctions *ones*, *sparse* et *diag* de SCILAB). Penser à proposer la représentation graphique des solutions exacte et approchée. Penser à la légende, titre, etc.

3. Représenter l'erreur logarithmique sur un graphique en échelle 'loglog' et retrouver l'ordre de convergence obtenu ci-dessus. Pour éclairer le graph logarithmique, on pourra tracer deux droites de pentes bien choisies aux côtés de la courbe d'erreur logarithmique.