École Normale Supérieure de Lyon **Année 2013–2014**

Département de Mathématiques **Analyse-EDP TD 6**

Équations elliptiques

Encore du "Lax-Milgram".

Exercice 1 (Batman & Robin). On note $\mathbb{R}^n_+$ le demi-espace $\mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$. Soit $\sigma \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ tel que $\sigma \geq 0$. Soient $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n_+)$ et $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{n-1})$. On étudie le problème elliptique avec conditions au bord de Robin suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n_+, \\ -\partial_x u(0,y) + \sigma(y) u(0,y) = g(y), & y \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

1. Définir une notion de solution faible de (1).

2. Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible de (1).

3. Dans le cas où $g = 0$ et σ est une constante positive, montrer que la solution faible de (1) est dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^n_+)$.

4. *En supposant toujours que $g = 0$, on note u_n la solution associée à $\sigma = n$. Montrer que u_n converge dans $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vers la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + u(x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n_+, \\ u(0,y) = 0, & y \in \mathbb{R}^{n-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Pour ne pas rester sur notre faim.

Exercice 2 (Cacciopoli). Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un ouvert. Soient $x_0 \in \Omega$ et $\bar{\rho} > 0$ tels que $B(x_0, \bar{\rho}) \subset \Omega$. On suppose que $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ est une solution de

$$-\Delta u + B \cdot \nabla u + cu = 0 \text{ dans } \Omega,$$

avec c une constante positive et $B \in \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe C_1, $C_2 \geq 0$ tels que

$$\forall 0 < \rho < \bar{\rho}, \qquad \int_{B(x_0,\rho)} \|\nabla u\|^2 \,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{C_1}{(\bar{\rho} - \rho)^2} + C_2 \right) \int_{B(x_0,\bar{\rho})} u^2 \,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3 (Unicité pour un problème elliptique linéaire.). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné régulier. Soient $c \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $B \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d\times d}$. On suppose que A est uniformément définie positive. Donner une condition suffisante sur B et c assurant l'unicité d'une solution $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A \nabla u) - B \cdot \nabla u + cu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = g & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$.

Exercice 4 (Unicité pour un problème de type Monge-Ampère.). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné régulier. Notre objectif est de montrer l'unicité d'une solution **convexe** $u \in \mathcal{C}^3(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = g & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ à valeurs strictement positives et $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$. On choisit donc $v \in \mathcal{C}^3(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ une autre solution convexe et on pose $w = u - v$ et $z = u + v$.

1. Montrer que A, définie par :
$$A = \begin{pmatrix} z_{yy} & -z_{xy} \\ -z_{xy} & z_{xx} \end{pmatrix},$$
est uniformément définie positive.

2. Montrer que w est solution d'un problème elliptique linéaire (avec les coefficients dépendants de z).

3. Conclure.