École Normale Supérieure de Lyon **Année 2013–2014**

Département de Mathématiques **Analyse-EDP TD 8**

Équations de transport
Rule #1: "Never change the deal".

Pour s'échauffer.

Exercice 1 (Vitesse de propagation du support finie). Considérons la loi de conservation scalaire suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, & \text{sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Supp}(u_0) \subset [A,B]$. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0,T^*[)$ la solution classique locale du problème où $0 < T^* \leq +\infty$ est le temps maximal d'existence de u. Montrer que :

$$\forall t \in [0,T^*[, \quad \mathrm{Supp}(u(\cdot,t)) \subset [A + t\min f'(u_0), B + t\max f'(u_0)].$$

Faire un dessin.

Exercice 2 (Terme de réaction linéaire et terme source). Résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + v \cdot \nabla_x u(x,t) = a(x,t)u(x,t) + s(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $v \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ et a, $s \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$.

Exercice 3 (Terme de réaction non-linéaire). On souhaite résoudre le problème suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} \partial_t u + v\partial_x u = u^2, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $v \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

1. Dans le cas où u_0 est négatif, montrer que (P) admet une unique solution classique **globale**.
2. Dans le cas où u_0 n'est pas nécessairement négatif mais est majorée. On pose $M = \sup u_0$ et on supposera que $M > 0$.
   (a) Montrer que (P) admet une unique solution classique **locale**. Déterminer le temps maximal d'existence T^*.
   (b) Donner un exemple pour lequel la solution est définie en $t = T^*$. Dans ce cas, pourquoi ne peut-on pas prolonger après T^* ?
3. Ce dernier phénomène peut également intervenir en $t = 0$: pour l'équation de Burgers sans terme source, donner une condition initiale u_0 non majorée telle que l'équation n'admet pas de solution classique locale.

Un tour chez Quick®. Dans tous les exercices qui suivent, on considère l'équation de Burgers suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\dfrac{u^2}{2} \right) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Seule la condition initiale changera dans chacun des exercices.

Exercice 4 (Burgers, raréfaction). Ici, u_0 est la fonction donnée par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

où $\alpha > 0$. Déterminer l'unique solution continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux **globale** de (P).

Exercice 5 (Burgers, choc). Soit $\alpha > 0$. Ici u_0 est la fonction donnée par :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

1. Déterminer l'unique solution continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux **locale** de (P). *On pourra calculer son temps maximal d'existence T^* en premier lieu.*

2. Donner une solution faible **globale** qui prolonge la solution donnée ci-dessus.

Exercice 6 (Burgers, détente). Ici $u_0 = \mathbf{1}_{x>0}$.

1. Déterminer une solution faible globale discontinue de (P).

2. Déterminer une solution faible globale continue de (P).

3. Déterminer une solution faible globale de (P) avec deux discontinuités.

Exercice 7 (Burgers, choc et détente). Ici $u^0(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Calculer le temps maximal d'existence T^* de l'unique solution classique locale de ce problème. Que se passe-t-il en T^* ?

Une autre équation hyperbolique.

Exercice 8 (Équation des ondes, formule de d'Alembert). Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = h(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. En se servant de la factorisation suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big),$$

déterminer une formule générale pour l'unique solution classique $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ du problème ci-dessus.

Un exercice plus difficile.

Exercice 9 (Caractéristiques pour l'équation de Vlasov). On considère l'équation cinétique de Vlasov suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \nabla_x u - \nabla_x W \cdot \nabla_v u = 0, & (x, v, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x, v, 0) = u_0(x, v), \end{cases}$$

où $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ et $W : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto W(x)$ est un potentiel de classe $\mathcal{C}^2$ qui jouera le rôle d'un potentiel de confinement spatial.

1. Réécrire le problème ci-dessus comme une équation de transport dans l'espace $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_*^+$.

2. Donner le problème de Cauchy satisfait par les caractéristiques $Z = (X, V)$ de ce problème de transport.

3. Que dire du comportement d'une solution classique u sur ces caractéristiques ?

4. Montrer que les caractéristiques évoluent sur les lignes de niveau du Hamiltonien $H = H(x, v)$ associé au problème. Que dire dans le cas où $n = 1$ et $W(x) = \frac{x^2}{2}$?

5. On se place maintenant dans le cas spécial $n = 2$ et on choisit pour tout $\varepsilon > 0$, W_ε indépendant de x_2 et tel que :
$$W_\varepsilon(x_1) = C(\varepsilon)\left(1 - \min\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, 1\right)\right),$$
où $C(\varepsilon) > 0$. *On pensera à dessiner W_ε. On va ignorer le problème de régularité de W_ε en $x_1 = \varepsilon$. Ceci est justifié dans les questions qui suivent.*

   On va s'intéresser au comportement des caractéristisques dans le cadran $X_1(0) \geq \varepsilon$ et à leur comportement asymptotique lorsque $\varepsilon \to 0$.

   (a) Pour tout $(X(0), V(0))$, donner le comportement de (X_2, V_2). On va donc maintenant s'intéresser au comportement de (X_1, V_1).

   (b) Pour $X_1(0) \geq \varepsilon$ et $V_1(0) \geq 0$, donner le comportement de (X_1, V_1).

   (c) Pour $X_1(0) > \varepsilon$ et $V_1(0) < 0$, montrer qu'il existe $t_\varepsilon > 0$ tel que $(X_1(t_\varepsilon), V(t_\varepsilon)) = (\varepsilon, V_1(0))$. Quel est le comportement de (X_1, V_1) sur $[0, t_\varepsilon]$?

   (d) On s'intéresse maintenant au cas $X_1(0) = \varepsilon$ et $V_1(0) < 0$.

      i. Déterminer $t_\varepsilon > 0$ tel que $X_1(t_\varepsilon) = \varepsilon$.

      ii. Quel est le comportement de (X_1, V_1) sur $[0, t_\varepsilon]$?

      iii. Expliciter $V_1(t_\varepsilon)$. Quel est le comportement de (X_1, V_1) sur $[t_\varepsilon, +\infty[$?

   (e) Choisissons $C(\varepsilon)$ tel que $\varepsilon / C(\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Étudier formellement le comportement des caractéristiques lorsque $\varepsilon \to 0$.