Équations de transport
Rule #2: "No names".

Exercice 1 (Choc entropique dans le cas f strictement convexe). Dans cet exercice, on considère le problème suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où u_0 est bornée et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est **strictement convexe**. Soit u une solution faible de (P) qui est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que u est entropique si et seulement si $u^- > u^+$ en tout point de discontinuité. *Indice : on pourra utiliser la fonction*

$$G(y) = \frac{f(y) - f(u^-)}{y - u^-}(\eta(y) - \eta(u^-)) - (\varphi(y) - \varphi(u^-)),$$

où (η, φ) est un couple entropie-flux régulier de l'équation.

2. Dans le cas de Burgers, donner un exemple de solution faible $\mathcal{C}^1$ par morceaux non-entropique.

Ce résultat se généralise au cas f non convexe : c'est la condition dite d'Oleinik.

Exercice 2 (Choc entropique, condition d'Oleinik). On se replace dans le cadre de l'Exercice 1 sans supposer cette fois-ci que f est convexe. En cas de discontinuité de u, on note $\mathrm{I}(u^-, u^+)$ l'intervalle d'extrémités u^- et u^+. On note alors $\Sigma(t)$ la courbe de la discontinuité dans le plan (t, x).

1. Rappeler la définition des couples entropie-flux de Kruzkov (η_k, Φ_k) associés à f et $k \in \mathbb{R}$.

2. En déduire que u est entropique si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$\Big[\big(f(u^+) - f(k)\big) \operatorname{sign}\big(u^+ - k\big) - \big(f(u^-) - f(k)\big) \operatorname{sign}\big(u^- - k\big) \Big] \leq \Sigma'(t) \Big[\big|u^+ - k\big| - \big|u^- - k\big| \Big],$$

en tout point de discontinuité.

3. En choisissant k à l'extérieur de $\mathrm{I}(u^-, u^+)$, que retrouve-t-on ?

4. En déduire que u est entropique si et seulement si :

$$\forall a \in [0,1], \quad \operatorname{sign}(u^+ - u^-) \big(f(au^- + (1-a)u^+) - af(u^-) - (1-a)f(u^+)\big) \geq 0.$$

C'est la condition d'Oleinik. Selon le signe de $(u^+ - u^-)$, que signifie-t-elle géométriquement sur f ?

5. Dans le cas où f est strictement convexe, retrouver le résultat de l'Exercice 1.
6. Dans le cas où u est entropique, montrer que les *inégalités de Lax* :

$$f'(u^+) \leq \Sigma'(t) \leq f'(u^-),$$

sont satisfaites en tout point de discontinuité. Comment cela se traduit-il géométriquement sur les caractéristiques ?

Exercice 3 (Solutions auto-similaires, ondes de raréfaction). On s'intéresse au *problème de Riemann* suivant :

$$\text{(LCS)} \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et u_0 est la fonction donnée par :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x \leq 0, \\ u_d & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soit u l'unique solution entropique de (LCS).

1. Pour tout $a > 0$, de quel problème $u_a(t,x) := u(at, ax)$ est-elle la solution entropique ?
2. En déduire que u est *auto-similaire*, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \quad u(x,t) = v\left(\frac{x}{t}\right).$$

Exprimer v en fonction de u.

3. Dans le cas où u est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, écrire l'équation différentielle satisfaite par v (on pensera aux conditions à l'infini). Dans ce cas, en déduire que u vérifie :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \quad f'(u(x,t)) = \frac{x}{t},$$

en dehors des points critiques de v.

Une onde de raréfaction est une solution entropique de (LCS) *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ *qui satisfait* $f'(u(t,x)) = \frac{x}{t}$ *sur les domaines où* v *n'a pas de point critique.*

Exercice 4 (Burgers à trois états). On considère l'équation de Burgers suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où u_0 est la fonction donnée par :

$$u_0(x) = \begin{cases} c_1 & \text{si } x < 0 \\ c_2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ c_3 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

où $c_1 \neq c_2 \neq c_3$. Donner la solution entropique de ce problème en fonction de l'ordre des constantes c_i. *On commencera par une condition initiale croissante, puis décroissante, puis* $c_1 < c_2 > c_3$ *et enfin* $c_1 > c_2 < c_3$.

Théorème (Solution du problème de Riemann (LCS)). *La solution entropique de* (LCS) *est donnée par la construction suivante :*

- *Si $u_g < u_d$: on appelle F la plus grande fonction convexe inférieure à f sur l'intervalle $[u_g, u_d]$. On définit alors u par :*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \quad u(x,t) = \begin{cases} u_g, & \frac{x}{t} \leq F'(u_g), \\ F'(u(x,t)) = \frac{x}{t}, & \frac{x}{t} \in]F'(u_g), F'(u_d)[, \\ u_d, & \frac{x}{t} \geq F'(u_d). \end{cases}$$

- *Si $u_g > u_d$: on appelle F la plus petite fonction concave supérieure à f sur l'intervalle $[u_d, u_g]$. On définit alors u par :*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \quad u(x,t) = \begin{cases} u_g, & \frac{x}{t} \leq F'(u_g), \\ F'(u(x,t)) = \frac{x}{t}, & \frac{x}{t} \in]F'(u_g), F'(u_d)[, \\ u_d, & \frac{x}{t} \geq F'(u_d). \end{cases}$$

Exercice 5 (Fluide diphasique). Déterminer la solution entropique de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{u^2 + (1-u)^2}\right) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+,$$

avec

$$u_0 = \mathbf{1}_{x<0} \qquad \text{puis avec} \qquad u_0 = \mathbf{1}_{x>0}.$$

Exercice 6 (*"Are you entropic?"*). On considère l'équation de Burgers suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+,$$

avec la condition initiale "signe" suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $u(x,t) = u_0(x)$ est une solution faible.
2. Pour $\varepsilon > 0$, déterminer la solution classique u^ε de l'équation de Burgers avec la condition initiale :
$$u_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -\varepsilon \\ \dfrac{x}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon \\ 1 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$
3. Déterminer $\lim_{\varepsilon \to 0^+} u^\varepsilon$.

Exercice 7 (Burgers avec viscosité évanescente). On considère l'équation de Burgers avec viscosité suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + u^\varepsilon \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} - \varepsilon \dfrac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} = 0, & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+, \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}$$

où $\varepsilon > 0$.

1. En effectuant *formellement* la transformée de Hopf-Cole suivante :

$$w^\varepsilon(x,t) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x u^\varepsilon(y,t)\,dy\right),$$

montrer que le problème se ramène à une équation linéaire bien connue. Attention à bien écrire la condition initiale.

2. En déduire alors que

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+, \qquad u^\varepsilon(x,t) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-y}{t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon t} - \frac{h(y)}{2\varepsilon}}\,dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{4\varepsilon t} - \frac{h(y)}{2\varepsilon}}\,dy},$$

pour une fonction h que l'on précisera. On définit alors $K(x,y,t) = \frac{|x-y|^2}{2t} + h(y)$.

3. *(Méthode de Laplace)* Soient k et l deux fonctions continues telles que k croit au plus quadratiquement et l au plus linéairement à l'infini. On suppose de plus que k admet un unique minimum en un point y_*. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} l(y) e^{-\frac{k(y)}{2\varepsilon}}\,dy}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k(y)}{2\varepsilon}}\,dy} = l(y_*).$$

4. Supposons pour simplifier que $u_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ est la fonction donnée par

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0, \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

Montrer que pour presque tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+$, la fonction $y \mapsto K(x,y,t)$ admet un unique minimum $y_*(x,t)$.

5. En déduire alors que la suite u_ε converge presque partout vers u donnée par

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+, \qquad u(x,t) = \frac{x - y_*(x,t)}{t}.$$

Montrer que u est la solution entropique de l'équation de Burgers:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_*^+, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$