Université Paris Dauphine Année 2015-2016
DUMI2E 1e année

Exercices d'algèbre linéaire

1 Logique

Exercice 1.1 (sens et négation du OU et du ET)

Jean est blond et Julie est brune. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, puis les nier.

1. Jean est brun ou Jean est blond.
2. Jean est roux et Julie est brune.
3. Jean n'est pas blond ou Julie est brune.
4. Il n'est pas vrai que Jean n'est pas blond.

Exercice 1.2 (négation du OU et du ET) Soit x un réel. Nier les propositions suivantes :

1. $x = 1$ ou $x = -1$
2. $0 \leq x \leq 1$ (ce qui veut dire par définition : $0 \leq x$ et $x \leq 1$)
3. $x = 0$ ou ($x^2 = 1$ et $x \geq 0$)

Exercice 1.3 (énoncés avec l'ensemble vide) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit P la proposition "Pour tout réel x dans A, $x^2 \geq 12$". Nier P. On suppose maintenant que $A = \emptyset$. La négation de P est-elle vraie ou fausse ? P est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 1.4 (négation d'énoncés avec quantificateurs) Nier, en français courant, les propositions suivantes :

1. Il y a au moins un étudiant qui aime le tennis.
2. Tous les étudiants aiment lire.
3. Dans toutes les matières, il y a au moins un étudiant qui travaille régulièrement.
4. Il y a au moins un étudiant qui, dans toutes les matières, travaille régulièrement .

Exercice 1.5 (propriétés du OU et du ET) Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :

(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D)

Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.6 (compréhension et négation d'implications) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

1. Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$
2. Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$
3. Pour tout réel x, si $x > 1$ alors $x \geq 2$
4. Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$ (se rappeler qu'une équivalence est une double implication)

Exercice 1.7 (ordre des quantificateurs, importance de l'ensemble auquel appartiennent les éléments) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout entier naturel n, il existe un réel x tel que $x > 2n$
2. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n, $x > 2n$
3. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
4. Pour tout réel positif x, pour tout réel positif y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.

Exercice 1.8 (implications) Donner la réciproque et la contraposée des implications suivantes (x est un réel, n un entier naturel)..

1. Si le père Noël existe alors Noël est en juillet
2. Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$.
3. Si $n \geq 1$ alors $n^2 > n$.

Exercice 1.9 Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression "x est la fille de y", où x et y sont des femmes. Ecrire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs, puis les nier

1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$ en écriture formalisée. Sa négation est : $\exists y \in F, \forall x \in F, nonP(x, y)$

Exercice 1.10 (compréhension d'énoncés avec quantificateurs, importance de l'ordre). A l'université Deuxphine, il n'y a que deux étudiants : Jean et Julie, et trois matières : algèbre, analyse et économie. Les résultats des étudiants sont les suivants.

	Algèbre	Analyse	Economie
Jean	12	5	16
Julie	14	15	7

Soit $E = \{\text{Jean, Julie}\}$ l'ensemble des étudiants. Soit $F = \{\text{algèbre, analyse, économie}\}$ l'ensemble des matières. Pour tout x dans E et tout y dans F, on désigne par $P(x, y)$ l'expression : "l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y".

Oralement, exprimer en français courant les propositions suivantes. Dire en justifiant si elles sont vraies ou fausses.

$$(1)\ \forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y),\quad (2)\ \exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y),\quad (3)\ \exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y),$$

$$(4)\ \forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y),\quad (5)\ \exists y \in F, \forall x \in E, \text{non}P(x, y),\quad (6)\ \exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y).$$

Exercice 1.11 Soit a un réel. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

P : Si (pour tout réel strictement positif ϵ, on a $|a| < \epsilon$) alors $a = 0$

Q : (Il existe un réel strictement positif ϵ tel que $|a| \geq \epsilon$) ou $a = 0$

R : Si $a \neq 0$ alors (il existe un réel strictement positif ϵ tel que $|a| \geq \epsilon$)

Montrer que R est vraie. En déduire que P et Q sont vraies.

Exercice 1.12 Soit E un ensemble. Soient $P(x)$ (respectivement, $Q(x)$) un énoncé qui, pour toute valeur donnée à x dans E, est soit vrai soit faux. Démontrer les propriétés suivantes :

1) $(\forall x \in E, P(x)$ ou $\forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow \forall x \in E, (P(x)$ ou $Q(x))$.

2) S'il existe x dans E tel que $(P(x)$ ou $Q(x))$ alors (il existe x dans E tel que $P(x)$ ou il existe x dans E tel que $Q(x)$)

Les réciproques de ces propriétés sont-elles vraies ?

Exercice 1.13 (Une récurrence erronée.) On considère des boites de crayons de couleurs. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $P(n)$ la proposition : "Dans une boite quelconque de n crayons de couleurs, tous les crayons sont de la même couleur". Le raisonnement suivant prouve-t-il que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$? Sinon, où est l'erreur ?

Dans une boite d'un seul crayon, les crayons ont bien sûr tous la même couleur. Donc $P(1)$ est vraie.

Soit maintenant n dans $\mathbb{N}^*$. Prenons une boite de $n+1$ crayons. Si l'on enlève provisoirement un crayon, il reste n crayons qui, d'après $P(n)$, sont tous de la même couleur. Remettons le crayons mis à l'écart et enlevons un autre crayon. Toujours d'après $P(n)$, les n crayons restants sont tous de la même couleur. Mais comme les crayons qui ne sont pas sortis de la boite ont une couleur constante, il s'ensuit que les $n+1$ crayons ont même couleur. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Question subsidiaire : pour quelles valeurs de n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie ?

Exercice 1.14 (preuve par contraposée) Montrer par contraposée que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 1.15 Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4 \Rightarrow n! \geq 2^n.$$

Exercice 1.16 (preuve par l'absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par l'absurde que n^2+1 n'est pas le carré d'un entier.

2 Calcul numérique

Exercice 2.1 Calculer, pour tout entier n non nul :

$$S = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}).$$

Exercice 2.2 On rappelle que pour tout réel x distinct de 1 et pour tout entier n

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

1. Vérifier que

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} 2^k.$$

2. En déduire une expression plus simple de $\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 2.3 (réindexation d'une somme) : Soient x un réel et n un entier naturel. Calculer les sommes

$$\sum_{k=2}^{n+2} x^{k-2} \text{ et } \sum_{k=4}^{n+3} x^{k-2}.$$

Exercice 2.4 Soit $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ deux familles de réels quelconques.

1. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

2. Montrer l'égalité suivante

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \times \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

3. En déduire l'inégalité de Cauchy

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \times \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

3 Ensembles

Exercice 3.1 (ensembles, équivalence) Soient A et B des ensembles. Montrer que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Exercice 3.2 *(Cours)* Soit x un réel positif ou nul. Montrer que si pour tout réel y strictement positif, $x \leq y$, alors $x = 0$.

Exercice 3.3 (preuve cyclique) Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E. Soient A^c et B^c leur complémentaires dans E respectifs. Montrer que les 8 propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{llll} (i)\, A \subset B & (ii) A \cap B = A & (iii) A^c \cup B^c = A^c & (iv) A \cap B^c = \emptyset \\ (v) A^c \cup B = E & (vi) B^c \subset A^c & (vii) A^c \cap B^c = B^c & (viii) A \cup B = B \end{array}$$

Exercice 3.4 Soient $A = \{3, 5\}$, et $B = \{2, 5, 9\}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 3.5 *(ensembles : définitions)* Soit $E = \{a\}$ un ensemble à un élement. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 3.6 (indices : définitions) Pour tout entier relatif k, on pose $A_k = [k, k+10]$. Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{k=3}^{9} A_k$; b) $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$; c) $\displaystyle\bigcap_{k=3}^{9} A_k$; d) $\displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$

Exercice 3.7 (indices, union, intersection) Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{x \in \mathbb{R}} [\sin x, 1 + \sin x]$; b) $\displaystyle\bigcup_{x \in [1, +\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; c) $\displaystyle\bigcap_{x \in [1, +\infty[} \left]\frac{1}{x}, x\right[$; d) $\displaystyle\bigcap_{x \in [1, +\infty[} \left[\frac{1}{x}, x\right]$

Exercice 3.8 (indices, propriétés de l'union et de l'intersection) Soient A un ensemble, I un ensemble d'indices et $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par I (c'est à dire, la donnée pour tout i dans I d'un ensemble B_i). Montrer que :

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \quad \text{et} \quad A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

Exercice 3.9 (différence entre l'ensemble vide, et l'ensemble contenant uniquement l'ensemble vide). Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Quel est l'ensemble des solutions des problèmes suivants ?

Problème 1 : quels sont les sous-ensembles de E qui ont au moins 4 éléments distincts ?

Problème 2 : quels sont les sous-ensembles de E inclus dans $C_E(E)$?

Exercice 3.10 (ensembles) Soient A un ensemble et X, Y, Z des parties de A.

a) Donner un exemple où: $X \cup Y = X \cup Z$ et $Y \neq Z$.

b) Donner un exemple où: $X \cap Y = X \cap Z$ et $Y \neq Z$.

c) Démontrer que

$$(X \cup Y = X \cup Z \quad \text{et} \quad X \cap Y = X \cap Z) \quad \Longrightarrow Y = Z\ .$$

Exercice 3.11 (ensembles, quantificateurs) On considère les ensembles

$$E = \left\{x \in [0, 1], \exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\} \text{ et } F = \left\{x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\}$$

L'ensemble E a-t-il un, une infinité, ou aucun élément ? Même question pour l'ensemble F.

Exercice 3.12 Pour tout entier naturel p, on note $p\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers relatifs de la forme pn avec n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} \subset q\mathbb{N} \Leftrightarrow p \in q\mathbb{N}$$

b) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} = q\mathbb{N} \Leftrightarrow p = q$$

Exercice 3.13 Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E. Soit A^c le complémentaire de A dans E. Montrer les propriétés suivantes :

$$a) \quad (A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B \cup C) \qquad\qquad b) \quad A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$$

Exercice 3.14 (Différence symétrique de deux parties.) Soit E un ensemble. Pour A et B des parties de E, on note $A\Delta B$ l'ensemble $(A \cup B)\backslash(A \cap B)$. Soient A, B et C des parties de E. Montrer que:

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$
$$A\Delta\emptyset = A,\ A\Delta B = B\Delta A,\ A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$$
$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

Exercice 3.15 Soit $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une famille de réels. On définit

$$A = \min_{1\leq i\leq n}(\max_{1\leq j\leq p} a_{ij}), \quad B = \max_{1\leq j\leq p}(\min_{1\leq i\leq n} a_{ij})$$

Montrer que $B \leq A$.

Exercice 3.16 (difficile) Soit $(A_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de parties d'un ensemble E. Les ensembles $\bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J} A_{ij}\Big)$ et $\bigcup_{j\in J}\Big(\bigcap_{i\in I} A_{ij}\Big)$ sont-ils égaux ? L'un est-il inclus dans l'autre.

Exercice 3.17

1. On pose

$$A_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tel que } 1 \leq i < j \leq n\},\ B_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tel que } 1 \leq i = j \leq n\}$$
$$\text{et } C_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tel que } 1 \leq j < i \leq n\}.$$

Montrer que

$$[\![1, n]\!]^2 = A_n \cup B_n \cup C_n.$$

2. Calculer la somme

$$S = \sum_{1\leq i<j\leq n} i \times j.$$

3. Calculer le produit

$$P = \prod_{1\leq i<j\leq n} i \times j.$$

Exercice 3.18 (équivalence) Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par : pour tous x et y dans E, $x\mathcal{R}y$ ssi $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.19 (équivalence) On considère une partition $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E, c'est-à-dire une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles non vides de E telle que:

$$E = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

On définit alors la relation $\mathcal{R}$ sur E par: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists i \in I, (x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles en sont les classes d'équivalence ?

Exercice 3.20 (équivalence) *Notation : si n et p sont des entiers relatifs, on dit que n divise p, et on note $n|p$, s'il existe un entier relatif k tels que $p = kn$. Par exemple,* 6 *divise* 12 *et* 30, *mais ne divise pas* 10.

Soit $n \in I\!N^*$. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $I\!N$ définie par : pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow n|(p-q)$$

(on dit alors que p est congru à q modulo n). Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que $p\mathcal{R}q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de p par n est le même que le reste de la division euclidienne de q par n. Quelles sont les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 3.21 Sur l'ensemble des parties de $I\!N$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par, pour toutes parties A et B de $I\!N$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe une bijection de A dans B. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

4 Applications

Exercice 4.1 Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) $f : \{0, 1, 2\} \to \{1, 8, -1, 24\}$ telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 24$, $f(2) = 1$.

2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$n \mapsto -n$

3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n + 1$

4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n - 1$

5) $f : \mathbb{N} \to \{-1, +1\}$ qui à tout n de $\mathbb{N}$ associe 1 si n est pair, et -1 si n est impair.

Exercice 4.2 On considère les applications suivantes :

$$1)\, f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 2)\, f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 3)\, f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{array} \quad 4)\, f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 + 1 \end{array} \quad 5)\, f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto 1/x^2 \end{array}$$

1. Quelle est l'allure du graphe des applications ? Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
2. Pour celles qui sont bijectives, quelle est leur application réciproque ?
3. Pour chacune de ces applications, déterminer l'image et l'image réciproque de l'intervalle $[2, 3]$.

Exercice 4.3 Soit f une application de A vers B. Démontrer que $A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\})$.

Exercice 4.4 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Soient $A \subset E$ et $C \subset G$. Montrer que $g \circ f(A) = g(f(A))$ et que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Exercice 4.5 Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$. Soit $x \in E$. Montrer que $f(x) = x$ si et seulement si $x \in f(E)$.

Exercice 4.6 (Fonction caractéristique)

Soit E un ensemble. A toute partie A de E on associe l'application f_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ sinon. L'application f_A est appelée fonction caractéristique de A.

Soient A et B deux parties de E. Exprimer en fonction de f_A et de f_B les fonctions caractéristiques de $C_E(A)$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \backslash B$.

Exercice 4.7 L'application

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{-x} \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? (On pourra avec profit construire le tableau de variation de g et utiliser des résultats d'analyse). Calculer $g^{-1}(\{-e\})$, $g^{-1}(\{1\})$, $g(\mathbb{R}_+)$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 4.8 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications. On considère l'application

$$h : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
b) On suppose f et g surjectives. A-t-on forcément h surjective ?
c) Montrer que si h est surjective, alors f et g sont surjectives.
d) Donner un exemple où h est injective mais ni f ni g ne sont injectives.

Exercice 4.9 Soient

$$f: \begin{array}{ccc} I\!R_- & \to & I\!R_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad h: \begin{array}{ccc} I\!R_- & \to & I\!R_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

a) l'application $h \circ f$ est-elle bien définie ?
b) Prouver que f et h sont bijectives, et déterminer leur réciproques.

Exercice 4.10 Soient E, F, G des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.
a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 4.11 L'application suivante est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$f: \begin{array}{ccc} I\!N \times I\!N & \to & I\!N \\ (n,p) & \mapsto & n+p \end{array}$$

Déterminer $f^{-1}(\{3\})$, $f(I\!N \times \{2\})$ et $f(2I\!N \times 3I\!N)$ où $kI\!N = \{kn, n \in I\!N\}$.

Exercice 4.12 Soient E, F, G, H des ensembles et f, g, h des applications telles que: $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 4.13 Soit $f : I\!R \to I\!R$ une application strictement monotone. Montrer que f est injective. Donner un exemple d'application de $I\!R$ dans $I\!R$ injective mais non monotone.

Exercice 4.14 L'application

$$f: \begin{array}{ccc} I\!R \times I\!R & \to & I\!R \times I\!R \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? bijective ?

Exercice 4.15 Soit f une application de E vers F. Démontrer les équivalences suivantes:

$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow \forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$$

$$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow \forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$$

Exercice 4.16 Soit f une application de E vers F et A une partie de E.
a) Démontrer qu'il n'y a en général pas d'inclusion entre $f(C_E(A))$ et $C_F(f(A))$.
b) Toutefois, démontrer: f bijective $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(C_E(A)) = C_F(f(A))$.

Exercice 4.17 a) Existe-t-il une application $f : I\!N \to I\!N$ strictement décroissante ?
b) Donner un exemple d'application $f : I\!N \to I\!N$ injective mais non strictement croissante.
c) Donner un exemple d'application $f : I\!N \to I\!N$ involutive ($f \circ f = Id_{I\!N}$) mais différente de l'identité.
d) Soit $f : I\!N \to I\!N$ une application injective. Montrer que $f(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.18 Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective ou f est surjective si et seulement si $f = Id_E$.

Exercice 4.19 Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

5 Ensemble fini, ensemble dénombrable

Exercice 5.1 Soit E un ensemble fini et soit A et B deux sous-ensembles de E. On note

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Montrer que

$$\operatorname{Card} A\Delta B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2 \operatorname{Card} A \cap B.$$

Exercice 5.2 Soit E un ensemble fini et soit $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de sous-ensembles de E, montrer par récurrence que pour tout entier n non nul

$$\operatorname{Card} \bigcup_{i=1}^{n} F_i \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card} F_i.$$

Montrer qu'il y a égalité si et seulement si les ensembles F_i sont disjoints deux à deux c'est-à-dire

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \ i \neq j \Longrightarrow F_i \cap F_j = \emptyset$$

Exercice 5.3 On considère l'application f définie de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ par

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ \ f(n,p) = \frac{(n+p)(n+p+1)}{2} + p.$$

1. Calculer $f(n,p)$ pour $n \in [\![0,3]\!]$ et $p \in [\![0,2]\!]$ et présenter les résultats sur un tableau à double entrée.
2. Montrer que f est injective.
3. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Il s'agit de montrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{N}$, on suppose $a \geq 2$. On pose

$$E = \{u \in \mathbb{N},\ \ \frac{u(u+1)}{2} \leq a\}.$$

   (a) Montrer que E admet un plus grand élément noté $M \in \mathbb{N}$.

   (b) On pose $p = a - \frac{M(M+1)}{2}$ et $n = M - p$, montrer que

$$f(n,p) = a.$$

   (c) En déduire que f est bijective.

Exercice 5.4 Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en utilisant l'application f définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \ f(n) = \begin{cases} 2n-1 & \text{si } n > 0, \\ -2n & \text{sinon }. \end{cases}$$

Exercice 5.5 Soit E et F deux ensembles avec F ensemble fini et f une surjection de E dans F vérifiant

$$\forall y \in F,\ \ \operatorname{Card}(f^{-1}(y)) = p.$$

Montrer que E est alors un ensemble fini et

$$\operatorname{Card} E = p \operatorname{Card} F.$$

6 Nombres complexes

Exercice 6.1 Mettre sous la forme $a + ib$ ($a, b \in I\!R$) les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 6.2 Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués :

1. $1 + i(1 + \sqrt{2})$.
2. $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5})$.
3. $\dfrac{\tan\varphi - i}{\tan\varphi + i}$ où φ est un réel.
4. $1 - \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ où $\theta \in I\!R$.
5. $e^{e^{i\alpha}}$ et $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$ où α et θ sont des réels.

Exercice 6.3 Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1 + i \quad ; \quad 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3} + i \quad ; \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}.$$

Exercice 6.4 Mettre sous forme trigonométrique $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 6.5 Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

Exercice 6.6 Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i} \quad ; \quad z_2 = 1 + j \quad ; \quad z_3 = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}.$$

Exercice 6.7

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z = 8(i + \sqrt{3})$.
2. Calculer les racines carrées du nombre complexe $z = 4ab + 2(a^2 - b^2)i$ (avec $a, b \in I\!R$).
3. Calculer les racines quatrièmes de -4.

Exercice 6.8 Soit δ une racine carrée du nombre complexe z. Trouver les racines carrées de $-z$, $(1 + i)z$ et z^3 en fonction de δ.

Exercice 6.9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 6.10 Soit $n \in I\!N$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in I\!R$:

$$(x + i)^n = (x - i)^n$$

Exercice 6.11 Calculer les racines carrées de $-2 + 2\sqrt{3}i$, puis celles de $9i$.

Exercice 6.12 Résoudre l'équation $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$.
a) Exprimer les racines z_1 et z_2 en fonction des nombres complexes $a = (\sqrt{3} + i)/2$ et $b = (-1 + i\sqrt{3})/2$.
b) Déterminer le module et l'argument de ces racines.
En déduire les valeurs de $\cos(5\pi/12)$, $\sin(5\pi/12)$, $\cos(11\pi/12)$ et $\sin(11\pi/12)$.

Exercice 6.13 Résoudre l'équation du second degré suivante : $z^2 - 2iz - 1 + 2i$.

Exercice 6.14 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation : $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0$.

Exercice 6.15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad ;$$

$$z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0 \; ; \; z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0 \; ; \; 4z^2 - 2z + 1 = 0 \; ;$$

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Exercice 6.16

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1 + iz| = |1 - iz|$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles. Trouver alors les solutions.

3. Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 6.17 Montrer que, pour tout réel t, $\cos^3(t) = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$. Donner une formule similaire pour $\sin^3(t)$.

Exercice 6.18 Pour tout réel t, calculer $\cos(5t)$ et $\sin(5t)$ en fonction de $\cos(t)$ et de $\sin(t)$.
Déduire du fait que $\cos(5\frac{\pi}{10}) = 0$ la valeur de $\cos(\pi/10)$.

Exercice 6.19

1. Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
2. Calculer $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, à l'aide des cosinus et sinus des multiples entiers de θ.

Exercice 6.20 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta), \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta), \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}.$$

Exercice 6.21 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(x + (2k\pi/n)) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} \sin(x + (2k\pi/n)).$$

Exercice 6.22 Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $(1 - z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 6.23 Montrer que tout nombre complexe z non réel de module 1 peut se mettre sous la forme $\dfrac{1+ir}{1-ir}$, où $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.24 Montrer que si a et b sont deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$, alors $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

Exercice 6.25 Démontrer l'égalité du parallélogramme:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}, |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Exercice 6.26 On définit une fonction f de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ en posant

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

1. On suppose z réel. Quel est le module de $f(z)$?
2. Trouver les nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

Exercice 6.27 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par:

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \frac{2}{\bar{z}}.$$

a) Montrer que: $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f \circ f(z) = z$.
b) f est-elle bijective ? Si oui, calculer f^{-1}.
c) Soit R un réel strictement positif, et C le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$. Calculer $f(C)$.
d) Quel est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z\}$?

Exercice 6.28 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, associe:

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}).$$

a) Montrer que pour tout z réel, $f(z) = \cos(z)$.
b) Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer que $f(z + 2\pi) = f(z)$, que $f(-z) = f(z)$, et que $f(2z) = 2(f(z))^2 - 1$.
c) f est-elle injective ?
d) Calculer $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 6.29 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \; f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

a) L'application f est-elle injective? surjective?
b) Calculer l'image réciproque de $\{i\}$ par f.
c) Déterminer l'image directe du cercle unité U par f.
d) On note H le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du segment $[-1, 1]$, et on note D l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1\}$. Montrer que l'on peut définir l'application:

$$\begin{array}{rcl} g : D & \longrightarrow & H \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

e) Montrer que g est bijective. (On pourra remarquer que le produit des racines de l'équation $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ est 1).

7 Les nombres entiers et les nombres rationnels

Exercice 7.1 Soit n un entier naturel dont le reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3, montrer que $n^2 + 1$ est divisible par 5.

Exercice 7.2 Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, 4 ne divise pas $n^2 + 1$.

Exercice 7.3 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n \mid n + 8$
2. $n - 3 \mid n^3 - 3$

Exercice 7.4 Que valent $pgcd(a, b)$ et $ppcm(a, b)$ dans les cas suivants ?

1. $a = 6$, $b = 12$;
2. $a = 3$, $b = 5$;
3. $a = 12$, $b = 18$.

Vérifier que dans ces exemples $pgcd(a, b) \times ppcm(a, b) = ab$.

Exercice 7.5 Déterminer $pgcd(a, b, c)$ et $ppcm(a, b, c)$ dans les cas suivants :

1. $a = b = c = 2$;
2. $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$;
3. $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$;
4. $a = 120$, $b = 60$, $c = 24$;
5. $a = 60$, $b = 45$, $c = 18$.

A-t-on toujours $pgcd(a, b, c) \times ppcm(a, b, c) = abc$?

Exercice 7.6 Calculer $pgcd(1863, 368, 14375)$ et $ppcm(1863, 368, 14375)$.

Exercice 7.7 Quel est le pgcd de $17^{63} - 1$ et $17^{42} - 1$?

Exercice 7.8 Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Démontrer que $pgcd(a, b, c) = pgcd(pgcd(a, b), c)$ et $ppcm(a, b, c) = ppcm(ppcm(a, b), c)$.

Exercice 7.9 Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les entiers n et $n + 1$ sont premiers entre eux, i.e. $pgcd(n, n + 1) = 1$. Y-a-t-il d'autres entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, n et $n + k$ sont premiers entre eux ?

Exercice 7.10 Soit k un entier naturel. Montrer que $9k + 4$ et $2k + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 7.11 Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $27x + 45y = 63$.

Exercice 7.12 1) A partir de l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $35u_0 + 13v_0 = 1$.
2) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (u, v) tels que $35u + 13v = 1$.

Exercice 7.13 Déterminer tous les couples d'entiers n, m tels que

$$1 \leq n \leq m, \ m + n = 256 \text{ et } pgcd\{n, m\} = 16 \ .$$

Exercice 7.14 Soit $n \geq 1$ un nombre entier. En s'inspirant de l'algorithme d'Euclide, montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{15n^2 + 8n + 6}{30n^2 + 21n + 13}$ est irreductible.

8 Polynômes

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 8.1 Effectuer les divisions euclidiennes de A par B pour les polynômes A et B suivants:

1. $A = X^3 + 6X^2 + 2X + 5$, $B = 2X^2 + 4$;
2. $A = X^7 + 2X^5 + 7X^3 + 15X + 2$, $B = X^3 + 2X$;
3. $A = X^4 + 1$, $B = X^2 + 1$;
4. $A = 2X^3 + 17X^2 - 7X + 2$, $B = 2X^5 - 1$.

Exercice 8.2 Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On considère la relation $\mathcal{R}$ suivante sur $\mathbb{K}[X]$: pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$,

$$P \,\mathcal{R}\, Q \Leftrightarrow B \mid (P - Q)$$

Montrer que $P \,\mathcal{R}\, Q$ si et seulement si P et Q ont même reste dans la division euclidienne par B. En déduire que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 8.3 Soient a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de a, $P(a)$ et $P'(a)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division de $P_n = X^n + X + b$ par $(X - a)$?

Exercice 8.4 Calculer le reste de la division euclidienne de A par B où $n \geq 2$, $A = X^n + X + 1$ et $B = (X-1)^2$? Pour p et q entiers tels que $p > q$, quel est le reste de la division de $X^p + X^q + 1$ par $X^2 + X$?

Exercice 8.5 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivant :

$$P_1(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2,\ \ P_2(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1,\ \ P_3(X) = X^4 + X^2 + 1,$$

$$P_4(X) = X^8 + X^4 + 1,\ \ P_5(X) = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1,\ \ P_6(X) = X^4 - 2X^2\cos(2\theta) + 1.$$

Exercice 8.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivant :

$$Q_1(X) = X^n - 1,\ \ Q_2(X) = 2X^n - 2,\ \ Q_3(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1,$$

$$Q_4(X) = X^n + 1,\ \ Q_5(X) = X^{2n} - 1.$$

Exercice 8.7 Soit $A(X) = X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$ et $B(X) = X^3 - 2X + 1$. Peut-on déterminer a et b pour que B divise A?

Exercice 8.8 Factoriser le polynôme réel

$$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!}\ .$$

Faire un raisonnement par récurrence.

Exercice 8.9 Montrer qu'un polynôme réel de degré 3 admettant une racine double dans $\mathbb{C}[X]$ a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8.10 Soient p et q deux réels fixés et $A(X)$ le polynôme $A = X^3 + pX + q$. Montrer que A admet au moins une racine réelle. Déterminer en fonction de (p, q) le nombre de racines réelles de A.

Exercice 8.11 Déterminer le degré du polynôme $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que P est divisible par $(X - j)^2$ où $j = e^{2i\pi/3}$. Déterminer deux racines réelles entières de P en précisant les ordres de multiplicité. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.12 Soit $P(X) = X^3 - 3X + 1$ et soient a, b, c les trois racines de P dans $\mathbb{C}[X]$. On ne cherchera pas à calculer ces racines. Montrer que a, b et c sont distinctes. Calculer $A = a + b + c$, $B = ab + ac + bc$ et $C = abc$.

Exercice 8.13 Quel est l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine du polynôme $P(X) = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$?

Exercice 8.14 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme à coefficients complexes $P(X) = X^4 + aX^3 + b$ admette une racine multiple.

Exercice 8.15 Soit $n \geq 3$. Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $P(1) = 3$, $P'(1) = 4$, $P''(1) = 5$ et $P^{(k)}(1) = 3$ si $k \in \{3, .., n\}$. Un tel polynôme est-il unique ?

Exercice 8.16 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient P_0, P_1,...,P_n dans $\mathbb{K}[X]$ tels que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $deg(P_k) = k$. On dit qu'un polynôme P est une combinaison linéaire des polynômes P_0,...,P_n s'il existe des scalaires λ_0,...,λ_n tels que $P(X) = \lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n$. Dans ce cas, on dit que cette écriture est unique si pour tous scalaires μ_0,...,μ_n tels que $P = \mu_0 P_0 + ... + \mu_n P_n$, on a $\mu_k = \lambda_k$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Le but de cet exercice est de montrer que tout polynôme de degré au plus n peut s'écrire, et de façon unique, comme combinaison linéaire des polynômes P_0, P_1,...,P_n.

Soit $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], deg(P) \leq n\}$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

a) Si $n \geq 1$, montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $P - \lambda_n P_n \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

b) En déduire qu'il existe des scalaires λ_0,...,λ_n tels que $P = \lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n$.

c) Montrer que cette écriture est unique.

Exercice 8.17 Soit
$$P(X) = \frac{X^n(4 - 2X)^n}{n!}$$
où n est un entier strictement positif.

a) Montrer que les $n - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = 0$ et $x = 2$.

b) Ecrire la formule de Taylor pour P au point 0 et au point 2.

c) En déduire que toutes les dérivées de P prennent des valeurs entières pour $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 8.18 Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X + 2) + P(X^2) = 0$. (On montrera que si α est racine de P, alors α^2 aussi, puis que la seule racine possible est 1.)

Exercice 8.19 En développant de deux façons différentes le polynôme
$$P = (X + 1)^{(p+q)} = (X + 1)^p (X + 1)^q \ ,$$
montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \forall q \geq n$,
$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}.$$
(Cette égalité est connue sous le nom d'égalité de Van der Monde.)

Exercice 8.20 Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.

Exercice 8.21 Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$. Vérifier que i est racine de P. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.22 Prouver que B divise A, où :
$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$,
$A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$,
$A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$.

Exercice 8.23 Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.24 Montrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1$.

Exercice 8.25 On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 6X^3 + 16X^2 + 22X + 15$.
i) Déterminer deux scalaires λ et μ tels que

$$P(X) = (X^2 + 3X + \lambda)^2 - (X + \mu)^2 .$$

ii) En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.26 On considère les deux polynômes $P(X) = X^4 + 1$ et $Q(X) = X^3 + 1$.
i) Calculer les racines de P et Q (dans $\mathbb{C}$) sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
ii) Décomposer P et Q en produit de polynôme irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
iii) Calculer le pgcd de P et Q.
iv) En déduire un couple (U, V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 3 tel que $PU + QV = 1$.

Exercice 8.27 Soit $A(X) = X^6 + aX^4 + bX^3 + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
i) Déterminer a, b, c tels que 1 soit racine double de A et j soit racine de A.
ii) Montrer alors que $A \in \mathbb{R}[X]$ et que j est racine double.
iii) Décomposer A en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.28 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants en facteurs irréductibles :

$$X^3 + 1 \qquad X^3 - 1 \qquad X^3 + 2X^2 + 2X + 1$$

$$X^4 + 1 \qquad X^4 + X^2 + 1 \qquad 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$$

Exercice 8.29

1. Montrer *sans calcul* que le polynôme $(X + 1)$ divise les polynômes $X^5 + 1$ et $X^3 + 1$.
2. Calculer explicitement les polynômes $P_1(X) = \frac{X^5+1}{X+1}$ et $P_2(X) = \frac{X^3+1}{X+1}$.
3. Montrer que P_1 et P_2 sont premiers entre eux.
4. En déduire le pgcd de $X^5 + 1$ et $X^3 + 1$.
5. Calculer le ppcm de $X^5 + 1$ et $X^3 + 1$.

9 Matrices

Exercice 9.1 On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux lorsqu'ils existent.

Exercice 9.2 Comparer AB et BA pour les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.3 Soient A et B deux matrices. A quelle condition les matrices AB et BA existent-elles toutes les deux ? A quelle condition ont-elles le même format ?

Exercice 9.4 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n,1}$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ une matrice de $M_{1,n}$. Vérifier que les deux produits UX et XU sont possibles et calculer les.

Exercice 9.5 Soit A une matrice de $M_{n,p}$.

a) Si I_n est la matrice unité d'ordre n, montrer que $I_n A = A$ puis que $AI_p = A$.

b) Soit E_{ij} la matrice élémentaire de M_n dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j, qui vaut 1. Calculer $E_{ij}A$. On note ici F_{ij} la matrice élémentaire de M_p définie de manière analogue. Calculer AF_{ij}.

Exercice 9.6 a) Déterminer deux matrices A et B de $M_2(I\!\!R)$ telles que :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calculer AB et BA. A-t-on $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 9.7 Puissance de matrice et formule du binôme : Soit A une matrice de M_n. On définit les puissances de A par récurrence :

$$A^0 = I_n\ ,\ A^1 = A \text{ et } \forall p \in I\!\!N,\ \ A^{p+1} = A^p A = AA^p.$$

On dit que deux matrices A et B de M_n commutent si $AB = BA$. Montrer que si A et B commutent, la formule du binôme de Newton est vraie :

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Exercice 9.8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = A - I_3$. Pour tout $n \in I\!\!N$, calculer J^n, puis A^n.

Exercice 9.9 Soit $x \in I\!\!R$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9.10 Soient A et B deux matrices de M_n. Effectuer les produits :

$$(A+B)^2 \ , \ (A-B)(A+B) \ , \ (A-B)^2 \ , \ (AB)^2 \text{ et } (I+A+\ldots+A^k)(I-A).$$

Exercice 9.11 Soient A et B deux matrices de M_n triangulaires inférieures. Montrer que leur somme et leur produit sont aussi triangulaires inférieures.

Exercice 9.12 Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée de M_n. On appelle trace de A, et on note $tr(A)$ le nombre réel :

$$tr(A)=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Montrer que : $\forall A \in M_n$, $\forall B \in M_n$, $\forall \lambda \in I\!R$,

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B), \qquad tr(\lambda A)=\lambda tr(A), \qquad tr(AB)=tr(BA).$$

Exercice 9.13 Soient A et B deux matrices carrées réelles, de format $n\times n$, avec $tr(A)\neq -1$. Déterminer les matrices $X\in M_n(I\!R)$ telles que

$$X+(tr(X))A=B\ .$$

Exercice 9.14 1) Soit X une matrice colonne à coefficient réels. Calculer X^TX. Montrer que $X^TX=0$ si et seulement si $X=0$.

2) Soit A une matrice à coefficient réels et X une matrice colonne à coefficient réels telle que le produit AX existe. Montrer que $AX=0$ si et seulement si $X^TA^TAX=0$.

3) Montrer qu'ainsi énoncé ces résultats sont faux pour des matrices à coefficients complexes. Comment peut-on les géneraliser au cas des matrices à coefficients complexes ?

Exercice 9.15 a) Montrer que, pour toute matrice A de $M_{n,p}$, les produits $A(A^T)$ et $(A^T)A$ sont des matrices carrées symétriques. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AA^T et A^TA.

b) Montrer que toute matrice carrée B peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique T. Déterminer S et T si $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.16 Soient n dans $I\!N^*$ et A une matrice de $M_n(I\!R)$ non nulle (c'est-à-dire différente de la matrice nulle) et symétrique.

1) Montrer que A^2 est symétrique.

2) Exprimer les coefficients de A^2 en fonction de ceux de A.

3) Montrer que la trace de A^2 est strictement positive, puis en déduire que A^2 est non nulle.

4) Montrer que pour tout k de $I\!N^*$, A^k est non nulle.

Exercice 9.17 La somme de deux matrices inversibles est-elle toujours inversible ?

Exercice 9.18 Déterminer l'inverse (quand il existe) des matrices suivantes par la méthode du pivot :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.19 a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A n'est pas inversible. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice N telle que : $B = I + N$, puis calculer $(I - N)(I + N)$. En déduire que B est inversible et calculer son inverse, puis B^{100}.

Exercice 9.20 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer en fonction de n et des termes initiaux les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par u_0, v_0 et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 5u_n - 2v_n \end{cases}$$

Exercice 9.21 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - 6A^2 + 12A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 9.22 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que:

$$A^2 + A + I = 0.$$

a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = -A - I$.

b) Montrer que $A^3 = I$.

c) Calculer, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p en fonction de A et I.

Exercice 9.23 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 puis A^3.

b) A est-elle inversible ?

c) On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $(A + I)^{10}$.

d) On considère les suites les suites réelles (u_n), (v_n) et w_n définies par u_0, v_0 et w_0 et par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = v_n \end{cases}$$

Calculer v_{10} quand $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = -1$.

Exercice 9.24 *(suite des noyaux)* Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$. On pose appelle noyau de A et on note Ker A l'ensemble des vecteurs colonnes X à n composantes tels que $AX = 0$:

$$\text{Ker}\, A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$$

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(A^k) \subset \mathrm{Ker}(A^{k+1})$.

2) Soit k un entier naturel tel que $\mathrm{Ker}(A^{k+1}) = \mathrm{Ker}(A^k)$. Montrer que pour tout entier $q \geq k$, $\mathrm{Ker}(A^q) = \mathrm{Ker}(A^k)$.

3) En déduire que si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A^2X = 0 \Leftrightarrow AX = 0$, alors pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $A^kX \Leftrightarrow AX = 0$.

Exercice 9.25 *(racines carrés de matrices)* Définition: Soit A et M des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On dit que M est une racine carrée de A si M^2 est bien définie et $M^2 = A$.

a) Soit M une matrice. Montrer que le produit MM n'est défini que si M est une matrice carrée. En déduire que si une matrice A a une racine carrée (ou cubique d'ailleurs), alors A est carrée.

b) Montrer que la matrice suivante n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais a exactement deux racines carrées dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

d) Dans $M_2(\mathbb{R})$, montrer que la matrice I_2 a une infinité de racines carrées dont les coefficients diagonaux sont nuls.

e) Déterminer toutes les racines carrées de la matrice I_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner un exemple de racine carrées de I_2 dans $M_2(\mathbb{C})$ qui n'appartient pas à $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9.26 On considère des matrices à coefficients réels. Soit A une matrice $n \times p$. On appelle noyau de A l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ telles que $AX = 0$. On appelle image de A l'ensemble des matrices colonnes $B \in \mathcal{M}_{n,1}$ telles que le système linéaire $AX = B$ ait au moins une solution. Déterminer le noyau et l'image des matrices suivantes. A chaque fois, calculer la somme du nombre de "degrés de liberté" du noyau et de l'image et comparer avec le nombre de colonnes de A. Que constatez-vous ?

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.27 Pour les matrices carrées A de l'exercice précédent (donc toutes sauf la 7)), déterminer les réels λ tels que le système linéaire $AX = \lambda X$ ait (au moins) une solution X non nulle. Pour chacune de ces valeurs de λ, résoudre le système $AX = \lambda X$.

10 Systèmes linéaires

Exercice 10.1 Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

1) $\left\{\begin{array}{lclcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{lclcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{lclcl} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 10+2i \\ 2x_1 & + & (4+2i)x_2 & = & 6+2i \end{array}\right.$

Exercice 10.2 Déterminer en fonction de la valeur des paramètres a et b le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

1) $\left\{\begin{array}{lclcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{lclcl} 2ax_1 & + & ax_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array}\right.$

Exercice 10.3 Un système linéaire peut-il avoir exactement trois solutions ? Pourquoi ?

Exercice 10.4 Un système linéaire de n équations à n inconnues a-t-il toujours exactement une solution ? au moins une solution ? au plus une solution ?

Exercice 10.5 a) Considérons un système linéaire de 7 équations à 5 inconnues dont le rang est 4. Ce système a-t-il nécéssairement au moins une solution ? au plus une solution ? Ce système peut-il avoir une solution unique ?

b) Mêmes questions pour un système de 7 équations à 5 inconnues de rang 5

c) Mêmes questions pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 4, puis pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 5.

Exercice 10.6 Résoudre les systèmes linéaires figurant dans le polycopié sur les systèmes linéaires (i.e. pour vous entrainer, résoudre vous même les systèmes du polycopié, et ne vérifier en regardant les solutions qu'à la fin).

Exercice 10.7 Résoudre les systèmes suivants (pour les deux derniers, résoudre en fonction de la valeur des paramètres réels a, b et m).

1) $\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +z & = & 4 \\ -2x & +y & -2z & = & -4 \end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{cccccc} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +2z & = & 4 \\ -2x & +y & -z & = & -3 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{cccccc} x & -2y & +3z & -4t & = & 4 \\ & y & -z & +t & = & -3 \\ x & +3y & & -3t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -4t & = & 4 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{cccl} x & +y & +2z & =1 \\ x & +2y & +z & =2 \\ 3x & +4y & +5z & =a \\ & y & +3z & =b \end{array}\right.$ 5) $\left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +(2m-1)z & = & 1 \\ mx & +y & +z & = & -1 \\ x & +my & +z & = & 3(m+1) \end{array}\right.$

11 Annales

Nous donnons les cc1, cc2, partiel et examen de l'année dernière. Dans tous les cas, les documents, calculatrices et portables sont interdits. Sauf mention explicite, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Algèbre Linéaire 1 - Contrôle continu 1 du 25/10/2013
Durée 1 heure

Exercice 1. On considère les propositions P et Q suivantes :

- P : il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m < n + 1$.
- Q : pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[(n \in A) \Rightarrow (n \leq M)]$.

(i) Donner la négation de P. Dire si P est vraie ou fausse.

(ii) Donner la négation de Q. Dire si Q est vraie ou fausse.

Exercice 2. Pour tout $x \in]0,1[$, on pose $I_x =]-x, x[$. Déterminer les ensembles A et B où

$$A = \bigcup_{x \in]0,1[} I_x \qquad \text{et} \qquad B = \bigcap_{x \in]0,1[} I_x$$

Exercice 3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = 1.2 + 2.3 + \ldots + n(n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 4.

(i) Soit X un ensemble non vide et $f : X \to X$ telle que $f \circ f = f$. Montrer que, pour tout sous-ensemble de A de X, on a $f(f^{-1}(A)) \subset f(A)$.

A partir de maintenant, on suppose que $X = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x) = x^2$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x$ si $x > 0$. On pose $A = [-4, 4]$.

(ii) Dessiner le graphe de f.

(iii) Montrer que $f \circ f = f$.

(iv) Montrer que $f^{-1}(A) = [-2, 4]$ et que $f(A) = [0, 16]$.

(v) En déduire que $f(f^{-1}(A)) \neq f(A)$.

Algèbre Linéaire 1 - Contrôle continu 2 du 13/12/2013
Durée 1 heure

Exercice 1. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(i) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+2i)z + i - 3 = 0$.

(ii) Déterminer dans $\mathbb{C}$ toutes les racines troisièmes de -27. On exprimera le résultat sous forme algèbrique.

(iii) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, calculer $\sin^5 \theta$ en fonction des cosinus et sinus des multiples entiers de θ.

Exercice 2. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(i) Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme $4X^3+X^2$ par le polynôme $X+1+i$.

(ii) Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $A(X) := X^2 + 2$ divise le polynôme $B(X) := X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

(iii) Soit P un polynôme réel tel que le reste de la division euclidienne de P par $X - 2$ est 1, et le reste de la division euclidienne de P par $X + 1$ est -5. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - X - 2$.

Exercice 3. Soient a et b deux entiers naturels avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$.

(i) On suppose, dans cette question seulement, que $a+b$ et ab sont premiers entre eux. Enoncer le théorème de Bézout et en déduire que a et b sont premiers entre eux.

On suppose à partir de maintenant que a et b sont premiers entre eux et on va chercher à montrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

(ii) Soit p un nombre premier. Montrer que, soit p et a sont premiers entre eux, soit p et b sont premiers entre eux.

(iii) Soit p un nombre premier. Montrer qu'il est impossible que p divise à la fois $a + b$ et ab.

(iv) En déduire que $a + b$ et ab sont premier entre eux.

Algèbre Linéaire 1 - Partiel du 12/11/2013
Durée 2 heure

Questions de cours Soient X, Y et Z trois ensembles et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.

1. On suppose que f et g sont injectives. Démontrer que $g \circ f$ est également injective.
2. On suppose que f et g sont bijectives. Démontrer que $g \circ f$ est également bijective et donner $(g \circ f)^{-1}$ en fonction de f^{-1} et g^{-1}.
3. Soit A une partie de X et B une partie de Y. Donner la définition de $f(A)$ et de $f^{-1}(B)$.
4. Soit B une partie de Y. Démontrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 1 (les questions sont indépendantes)

1.a) Ecrire sous la forme $a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) le nombre complexe $\dfrac{1+3i}{2-i} + \dfrac{1-3i}{2+i}$.

1.b) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^2 + z\bar{z} = 0$.

1.c) Soit $\theta \in [0, \pi/2[$. Déterminer en fonction de θ le module et l'argument du nombre complexe $z = 1 + \cos(2\theta) - i\sin(2\theta)$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

2.a) Dessiner le graphe de f.

2.b) f est-elle injective ?

2.c) f est-elle surjective ?

2.d) Montrer que $f([-1, 1]) = [-1, 1]$.

2.e) On définit $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ par $g(x) = f(x)$ si $x \in [-1, 1]$. Montrer que g est une bijection et calculer g^{-1}.

Exercice 3 On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls. On définit sur $\mathbb{C}^*$ la relation $\mathcal{R}$ suivante : pour tout $a, b \in \mathbb{C}^*$, on dit que $a\mathcal{R}b$ si $a\bar{b}$ est un nombre réel strictement positif.

3.a) Rappeler ce qu'est une relation d'équivalence.

3.b) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

3.c) Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}^*$,

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ ont même argument.}$$

Algèbre Linéaire 1 - Examen du 17/01/2013
Durée 2h

Questions de cours.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que si $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est une racine de P, alors $\overline{\alpha}$ (le nombre complexe conjugué de α) est également une racine de P.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A, B et C trois matrices réelles de format $n \times n$. On note 0_n la matrice nulle de format $n \times n$

   (i) On suppose que A est inversible. Démontrer que, si $AB = AC$, alors $B = C$.

   (ii) Pour $n = 2$, donner un exemple de matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ et $B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $A \neq 0_2$, $B \neq 0_2$ et $AB = 0_2$.

Exercice 1.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées de format $n \times n$. On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $M_n(\mathbb{R})$ en posant, pour tout A et B dans $M_n(\mathbb{R})$,

   $$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow (\exists P \in M_n(\mathbb{R}),\ \exists Q \in M_n(\mathbb{R}),\ \text{avec } P \text{ et } Q \text{ inversibles, telles que } B = PAQ.)$$

   (i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   (ii) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer $A\mathcal{R}I_n$, si et seulement si, A est inversible.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que le polynôme $A(X) = (X-1)^2$ divise le polynôme $B(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

2. Calculer les racines n-ièmes de $-i$ et de $1+i$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + 1 - i = 0$.

4. En déduire les racines dans $\mathbb{C}$ de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 3. Soit Φ l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Phi(P)$ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Phi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\Phi(P)$ est le polynôme nul (i.e., tels que $P(X+1) - P(X) = 0$).

2. Montrer que

   $$\Phi(aP + bQ) = a\Phi(P) + b\Phi(Q) \qquad \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R}\,.$$

3. On pose $H_0(X) = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(X) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$. Montrer que $\Phi(H_n) = H_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

4. Soit $P(X) = X^2$ et $Q = 2H_3 + H_2$. Vérifier que $\Phi(Q) = P$.
5. Montrer que, pour tout entier $n \in I\!N^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \Phi(Q)(k) = Q(n+1) - Q(0)$$

(où P et Q sont définis à la question précédente). En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ .$$