Université Paris Dauphine Année 2017-2018
DUMI2E 1e année

Exercices d'algèbre linéaire

1 Logique

Exercice 1.1 (propriétés du OU et du ET) Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :

(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D)

Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.2 (compréhension et négation d'implications) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

1. Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$
2. Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$
3. Pour tout réel x, si $x > 1$ alors $x \geq 2$
4. Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$ (se rappeler qu'une équivalence est une double implication)

Exercice 1.3 (ordre des quantificateurs, importance de l'ensemble auquel appartiennent les éléments) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout entier naturel n, il existe un réel x tel que $x > 2n$
2. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n, $x > 2n$
3. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
4. Pour tout réel positif x, pour tout réel positif y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.

Exercice 1.4 (implications) Donner la réciproque et la contraposée des implications suivantes (x est un réel, n un entier naturel)..

1. Si le père Noël existe alors Noël est en juillet
2. Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$.
3. Si $n \geq 1$ alors $n^2 > n$.

Exercice 1.5 Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression "x est la fille de y", où x et y sont des femmes. Ecrire les propositions suivantes à l'aide de quantificateurs, puis les nier

1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.

4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x,y)$ en écriture formalisée. Sa négation est : $\exists y \in F, \forall x \in F, non P(x,y)$

Exercice 1.6 (compréhension d'énoncés avec quantificateurs, importance de l'ordre). A l'université Deuxphine, il n'y a que deux étudiants : Jean et Julie, et trois matières : algèbre, analyse et économie. Les résultats des étudiants sont les suivants.

	Algèbre	Analyse	Economie
Jean	12	5	16
Julie	14	15	7

Soit $E = \{\text{Jean, Julie}\}$ l'ensemble des étudiants. Soit $F = \{\text{algèbre, analyse, économie}\}$ l'ensemble des matières. Pour tout x dans E et tout y dans F, on désigne par $P(x,y)$ l'expression : "l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y".

Oralement, exprimer en français courant les propositions suivantes. Dire en justifiant si elles sont vraies ou fausses.

$$(1)\ \forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y),\quad (2)\ \exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y),\quad (3)\ \exists x \in E, \forall y \in F, P(x,y),$$

$$(4)\ \forall y \in F, \exists x \in E, P(x,y),\quad (5)\ \exists y \in F, \forall x \in E, \text{non}P(x,y),\quad (6)\ \exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y).$$

Exercice 1.7 Soit E un ensemble. Soient $P(x)$ (respectivement, $Q(x)$) un énoncé qui, pour toute valeur donnée à x dans E, est soit vrai soit faux. Démontrer les propriétés suivantes :

1) $(\forall x \in E, P(x)$ ou $\forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow \forall x \in E, (P(x)$ ou $Q(x))$.

2) S'il existe x dans E tel que ($P(x)$ ou $Q(x)$) alors (il existe x dans E tel que $P(x)$ ou il existe x dans E tel que $Q(x)$)

Les réciproques de ces propriétés sont-elles vraies ?

Exercice 1.8 (Une récurrence erronée.) On considère des boites de crayons de couleurs. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $P(n)$ la proposition : "Dans une boite quelconque de n crayons de couleurs, tous les crayons sont de la même couleur". Le raisonnement suivant prouve-t-il que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$? Sinon, où est l'erreur ?

Dans une boite d'un seul crayon, les crayons ont bien sûr tous la même couleur. Donc $P(1)$ est vraie.

Soit maintenant n dans $I\!N^*$. Prenons une boite de $n+1$ crayons. Si l'on enlève provisoirement un crayon, il reste n crayons qui, d'après $P(n)$, sont tous de la même couleur. Remettons le crayons mis à l'écart et enlevons un autre crayon. Toujours d'après $P(n)$, les n crayons restants sont tous de la même couleur. Mais comme les crayons qui ne sont pas sortis de la boite ont une couleur constante, il s'ensuit que les $n+1$ crayons ont même couleur. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Question subsidiaire : pour quelles valeurs de n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie ?

Exercice 1.9 Pour tout entier n, on note $P(n)$, la proposition $n! \geq 2^n$. Montrer que la proposition suivante est vraie

$$\forall n \in I\!N^*,\quad P(n) \Longrightarrow P(n+1).$$

Peut-on en déduire que $P(n)$ est vraie pour tout entier n non nul.

2 Calcul numérique

Exercice 2.1 Calculer, pour tout entier n non nul :

$$S = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}).$$

Exercice 2.2 On rappelle que pour tout réel x distinct de 1 et pour tout entier n

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.$$

1. Vérifier que
$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} 2^k.$$

2. En déduire une expression plus simple de $\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 2.3 (réindexation d'une somme) : Soient x un réel et n un entier naturel. Calculer les sommes

$$\sum_{k=2}^{n+2} x^{k-2} \text{ et } \sum_{k=4}^{n+3} x^{k-2}.$$

Exercice 2.4 Soit $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$ deux familles de réels quelconques.

1. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j.$$

2. Montrer l'égalité suivante
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \times \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

3. En déduire l'inégalité de Cauchy
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \times \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

3 Ensembles

Exercice 3.1 (ensembles, équivalence) Soient A et B des ensembles. Montrer que

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

Exercice 3.2 Soit x un réel positif ou nul. Montrer que si pour tout réel y strictement positif, $x \leq y$, alors $x = 0$.

Exercice 3.3 (preuve cyclique) Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E. Soient A^c et B^c leur complémentaires dans E respectifs. Montrer que les 8 propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{llll} (i)\ A \subset B & (ii) A \cap B = A & (iii) A^c \cup B^c = A^c & (iv) A \cap B^c = \emptyset \\ (v) A^c \cup B = E & (vi) B^c \subset A^c & (vii) A^c \cap B^c = B^c & (viii) A \cup B = B \end{array}$$

Exercice 3.4 Soient $A = \{3, 5\}$, et $B = \{2, 5, 9\}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 3.5 *(ensembles : définitions)* Soit $E = \{a\}$ un ensemble à un élement. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 3.6 (indices : définitions) Pour tout entier relatif k, on pose $A_k = [k, k+10]$. Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{k=3}^{9} A_k$; b) $\displaystyle\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$; c) $\displaystyle\bigcap_{k=3}^{9} A_k$; d) $\displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$

Exercice 3.7 (indices, union, intersection) Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{x \in \mathbb{R}} [\sin x, 1 + \sin x]$; b) $\displaystyle\bigcup_{x \in [1, +\infty[} \left] \frac{1}{x}, x \right[$; c) $\displaystyle\bigcap_{x \in [1, +\infty[} \left] \frac{1}{x}, x \right[$; d) $\displaystyle\bigcap_{x \in [1, +\infty[} \left[\frac{1}{x}, x \right]$

Exercice 3.8 (indices, propriétés de l'union et de l'intersection) Soient A un ensemble, I un ensemble d'indices et $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par I (c'est à dire, la donnée pour tout i dans I d'un ensemble B_i). Montrer que :

$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \quad \text{et} \quad A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

Exercice 3.9 (différence entre l'ensemble vide, et l'ensemble contenant uniquement l'ensemble vide). Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Quel est l'ensemble des solutions des problèmes suivants ?
Problème 1 : quels sont les sous-ensembles de E qui ont au moins 4 éléments distincts ?
Problème 2 : quels sont les sous-ensembles de E inclus dans $C_E(E)$?

Exercice 3.10 (ensembles) Soient A un ensemble et X, Y, Z des parties de A.
a) Donner un exemple où: $X \cup Y = X \cup Z$ et $Y \neq Z$.
b) Donner un exemple où: $X \cap Y = X \cap Z$ et $Y \neq Z$.
c) Démontrer que

$$(X \cup Y = X \cup Z \quad \text{et} \quad X \cap Y = X \cap Z) \quad \Longrightarrow Y = Z\ .$$

Exercice 3.11 (ensembles, quantificateurs) On considère les ensembles

$$E = \left\{ x \in [0,1], \exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1} \right\} \text{ et } F = \left\{ x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1} \right\}$$

L'ensemble E a-t-il un, une infinité, ou aucun élément ? Même question pour l'ensemble F.

Exercice 3.12 Pour tout entier naturel p, on note $p\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers relatifs de la forme pn avec n dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} \subset q\mathbb{N} \Leftrightarrow p \in q\mathbb{N}$$

b) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} = q\mathbb{N} \Leftrightarrow p = q$$

Exercice 3.13 Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E. Soit A^c le complémentaire de A dans E. Montrer les propriétés suivantes :

$$a) \quad (A \backslash B) \backslash C = A \backslash (B \cup C) \qquad\qquad b) \quad A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$$

Exercice 3.14 (Différence symétrique de deux parties.) Soit E un ensemble. Pour A et B des parties de E, on note $A\Delta B$ l'ensemble $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$. Soient A, B et C des parties de E. Montrer que:

$$A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$
$$A\Delta\emptyset = A,\ A\Delta B = B\Delta A,\ A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$$
$$A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$$

Exercice 3.15 Soit $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une famille de réels. On définit

$$A = \min_{1 \leq i \leq n} (\max_{1 \leq j \leq p} a_{ij}), \quad B = \max_{1 \leq j \leq p} (\min_{1 \leq i \leq n} a_{ij})$$

Montrer que $B \leq A$.

Exercice 3.16 Soit $(A_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de parties d'un ensemble E. Les ensembles $\bigcap_{i \in I} \Big(\bigcup_{j \in J} A_{ij} \Big)$ et $\bigcup_{j \in J} \Big(\bigcap_{i \in I} A_{ij} \Big)$ sont-ils égaux ? L'un est-il inclus dans l'autre.

Exercice 3.17

1. On pose

$$A_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tel que } 1 \leq i < j \leq n\},\ B_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tel que } 1 \leq i = j \leq n\}$$
$$\text{et } C_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \text{tel que } 1 \leq j < i \leq n\}.$$

Montrer que
$$[\![1, n]\!]^2 = A_n \cup B_n \cup C_n.$$

2. Calculer la somme
$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \times j.$$

3. Calculer le produit
$$P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} i \times j.$$

Exercice 3.18 (équivalence) Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par : pour tous x et y dans E, $x\mathcal{R}y$ ssi $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.19 (équivalence) On considère une partition $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E, c'est-à-dire une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles non vides de E telle que:

$$E = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

On définit alors la relation $\mathcal{R}$ sur E par: $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists i \in I, (x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles en sont les classes d'équivalence ?

Exercice 3.20 (équivalence) *Notation : si n et p sont des entiers relatifs, on dit que n divise p, et on note $n|p$, s'il existe un entier relatif k tels que $p = kn$. Par exemple,* 6 *divise* 12 *et* 30*, mais ne divise pas* 10*.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par : pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow n|(p-q)$$

(on dit alors que p est congru à q modulo n). Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que $p\mathcal{R}q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de p par n est le même que le reste de la division euclidienne de q par n. Quelles sont les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 3.21 Sur l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par, pour toutes parties A et B de $\mathbb{N}$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe une bijection de A dans B. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

4 Applications

Exercice 4.1 Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) $f : \{0,1,2\} \to \{1,8,-1,24\}$ telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 24$, $f(2) = 1$.

2) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$n \mapsto -n$

3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n+1$

4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$n \mapsto n-1$

5) $f : \mathbb{N} \to \{-1,+1\}$ qui à tout n de $\mathbb{N}$ associe 1 si n est pair, et -1 si n est impair.

Exercice 4.2 On considère les applications suivantes :

$$1)\, f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 2)\, f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \quad 3)\, f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2+1 \end{array} \quad 4)\, f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3+1 \end{array} \quad 5)\, f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto 1/x^2 \end{array}$$

1. Quelle est l'allure du graphe des applications ? Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
2. Pour celles qui sont bijectives, quelle est leur application réciproque ?
3. Pour chacune de ces applications, déterminer l'image et l'image réciproque de l'intervalle $[2,3]$.

Exercice 4.3 Soit f une application de A vers B. Démontrer que $A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\})$.

Exercice 4.4 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications. Soient $A \subset E$ et $C \subset G$. Montrer que $g \circ f(A) = g(f(A))$ et que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Exercice 4.5 Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$. Soit $x \in E$. Montrer que $f(x) = x$ si et seulement si $x \in f(E)$.

Exercice 4.6 (Fonction caractéristique)

Soit E un ensemble. A toute partie A de E on associe l'application f_A de E dans $\{0,1\}$ définie par $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ sinon. L'application f_A est appelée fonction caractéristique de A.

Soient A et B deux parties de E. Exprimer en fonction de f_A et de f_B les fonctions caractéristiques de $C_E(A)$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \backslash B$.

Exercice 4.7 L'application

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{-x} \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? (On pourra avec profit construire le tableau de variation de g et utiliser des résultats d'analyse). Calculer $g^{-1}(\{-e\})$, $g^{-1}(\{1\})$, $g(\mathbb{R}_+)$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 4.8 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications. On considère l'application

$$h : \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) On suppose f et g surjectives. A-t-on forcément h surjective ?

c) Montrer que si h est surjective, alors f et g sont surjectives.

d) Donner un exemple où h est injective mais ni f ni g ne sont injectives.

Exercice 4.9 Soient

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

a) l'application $h \circ f$ est-elle bien définie ?
b) Prouver que f et h sont bijectives, et déterminer leur réciproques.

Exercice 4.10 Soient E, F, G des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.
a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 4.11 L'application suivante est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n,p) & \mapsto & n+p \end{array}$$

Déterminer $f^{-1}(\{3\})$, $f(\mathbb{N} \times \{2\})$ et $f(2\mathbb{N} \times 3\mathbb{N})$ où $k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 4.12 Soient E, F, G, H des ensembles et f, g, h des applications telles que: $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 4.13 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Montrer que f est injective. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective mais non monotone.

Exercice 4.14 L'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? bijective ?

Exercice 4.15 Soit f une application de E vers F. Démontrer les équivalences suivantes:

$$f \text{ est injective } \Longleftrightarrow \forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$$

$$f \text{ est surjective } \Longleftrightarrow \forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$$

Exercice 4.16 Soit f une application de E vers F et A une partie de E.
a) Démontrer qu'il n'y a en général pas d'inclusion entre $f(C_E(A))$ et $C_F(f(A))$.
b) Toutefois, démontrer: f bijective $\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(C_E(A)) = C_F(f(A))$.

Exercice 4.17 a) Existe-t-il une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante ?
b) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective mais non strictement croissante.
c) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ involutive ($f \circ f = Id_{\mathbb{N}}$) mais différente de l'identité.
d) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective. Montrer que $f(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 4.18 Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective ou f est surjective si et seulement si $f = Id_E$.

Exercice 4.19 Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

5 Ensemble fini, ensemble dénombrable

Exercice 5.1 Soit E un ensemble fini et soit A et B deux sous-ensembles de E. On note

$$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

Montrer que

$$\operatorname{Card} A\Delta B = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - 2\operatorname{Card} A\cap B.$$

Exercice 5.2 Soit E un ensemble fini et soit $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de sous-ensembles de E, montrer par récurrence que pour tout entier n non nul

$$\operatorname{Card} \bigcup_{i=1}^{n} F_i \leq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card} F_i.$$

Montrer qu'il y a égalité si et seulement si les ensembles F_i sont disjoints deux à deux c'est-à-dire

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \ i\neq j \Longrightarrow F_i\cap F_j=\emptyset$$

Exercice 5.3 On considère l'application f définie de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ par

$$\forall (n,p)\in \mathbb{N}^2,\ \ f(n,p)=\frac{(n+p)(n+p+1)}{2}+p.$$

1. Calculer $f(n,p)$ pour $n\in [\![0,3]\!]$ et $p\in [\![0,2]\!]$ et présenter les résultats sur un tableau à double entrée.
2. Montrer que f est injective.
3. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Il s'agit de montrer que f est surjective. Soit $a\in\mathbb{N}$, on suppose $a\geq 2$. On pose

$$E=\{u\in\mathbb{N},\ \ \frac{u(u+1)}{2}\leq a\}.$$

   (a) Montrer que E admet un plus grand élément noté $M\in\mathbb{N}$.
   (b) On pose $p=a-\frac{M(M+1)}{2}$ et $n=M-p$, montrer que

$$f(n,p)=a.$$

   (c) En déduire que f est bijective.

Exercice 5.4 Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable en utilisant l'application f définie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ par

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ \ f(n)=\begin{cases} 2n-1 & \text{si } n>0,\\ -2n & \text{sinon .}\end{cases}$$

Exercice 5.5 Soit E et F deux ensembles avec F ensemble fini et f une surjection de E dans F vérifiant

$$\forall y\in F,\ \ \operatorname{Card}(f^{-1}(\{y\}))=p.$$

Montrer que E est alors un ensemble fini et

$$\operatorname{Card} E = p\operatorname{Card} F.$$

6 Nombres complexes

Exercice 6.1 Mettre sous la forme $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 6.2 Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués :

1. $1 + i(1 + \sqrt{2})$ (calculer le carré) .
2. $\dfrac{\tan\varphi - i}{\tan\varphi + i}$ où φ est un réel.
3. $1 - \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
4. $e^{e^{i\alpha}}$ et $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$ où α et θ sont des réels.

Exercice 6.3 Calculer le module et l'argument de

$$z = \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5}) = a + ib$$

1. Calculer a^2, a^4, b^2, b^4 et a^2b^2.
2. Montrer que

$$a^4 - 10a^2b^2 + 5b^4 = 0 \text{ et } 5a^2 - 10a^2b^2 + b^4 = 256(1 + \sqrt{5}).$$

Exercice 6.4 Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 6.5 Mettre sous forme trigonométrique $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 6.6 Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

Exercice 6.7 Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2 = 1 + j \quad ; \quad z_3 = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}.$$

Exercice 6.8

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z = 8(i + \sqrt{3})$.
2. Calculer les racines carrées du nombre complexe $z = 4ab + 2(a^2 - b^2)i$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
3. Calculer les racines quatrièmes de -4.

Exercice 6.9 Soit δ une racine carrée du nombre complexe z. Trouver les racines carrées de $-z$, $(1+i)z$ et z^3 en fonction de δ.

Exercice 6.10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 6.11 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+i)^n = (x-i)^n$$

Exercice 6.12 Calculer les racines carrées de $-2+2\sqrt{3}i$, puis celles de $9i$.

Exercice 6.13 Résoudre l'équation $z^2 + (1-i\sqrt{3})z - (1+i\sqrt{3}) = 0$.

a) Exprimer les racines z_1 et z_2 en fonction des nombres complexes $a = (\sqrt{3}+i)/2$ et $b = (-1+i\sqrt{3})/2$.

b) Déterminer le module et l'argument de ces racines.

En déduire les valeurs de $\cos(5\pi/12)$, $\sin(5\pi/12)$, $\cos(11\pi/12)$ et $\sin(11\pi/12)$.

Exercice 6.14 Résoudre l'équation du second degré suivante : $z^2 - 2iz - 1 + 2i$.

Exercice 6.15 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation : $z^2 - 2e^{i\theta}z + 2i\sin(\theta)e^{i\theta} = 0$.

Exercice 6.16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2+z+1=0 \quad ; \quad z^2-(1+2i)z+i-1=0 \quad ; \quad z^2-\sqrt{3}z-i=0 \quad ;$$

$$z^2-(5-14i)z-2(5i+12)=0 \ ; \ z^2-(3+4i)z-1+5i=0 \ ; \ 4z^2-2z+1=0 \ ;$$

$$z^4+10z^2+169=0 \quad ; \quad z^4+2z^2+4=0.$$

Exercice 6.17

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1+iz| = |1-iz|$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

   $$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$$

   où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles. Trouver alors les solutions.
3. Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 6.18 Montrer que, pour tout réel t, $\cos^3(t) = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$. Donner une formule similaire pour $\sin^3(t)$.

Exercice 6.19 Pour tout réel t, calculer $\cos(5t)$ et $\sin(5t)$ en fonction de $\cos(t)$ et de $\sin(t)$.

Déduire du fait que $\cos(5\frac{\pi}{10}) = 0$ la valeur de $\cos(\pi/10)$.

Exercice 6.20

1. Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
2. Calculer $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, à l'aide des cosinus et sinus des multiples entiers de θ.

Exercice 6.21 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta), \ \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta), \ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=-n}^{n}e^{ik\theta}.$$

Exercice 6.22 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(x+(2k\pi/n)) \text{ et } \sum_{k=1}^{n}\sin(x+(2k\pi/n)).$$

Exercice 6.23 Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes $z, \frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 6.24 Montrer que tout nombre complexe z non réel de module 1 peut se mettre sous la forme $\dfrac{1+ir}{1-ir}$, où $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.25 Montrer que si a et b sont deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$, alors $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

Exercice 6.26 Démontrer l'égalité du parallélogramme:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}, |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Exercice 6.27 On définit une fonction f de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ en posant

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

1. On suppose z réel. Quel est le module de $f(z)$?
2. Trouver les nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

Exercice 6.28 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par:

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \frac{2}{\bar{z}}.$$

a) Montrer que: $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f \circ f(z) = z$.
b) f est-elle bijective ? Si oui, calculer f^{-1}.
c) Soit R un réel strictement positif, et C le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$. Calculer $f(C)$.
d) Quel est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z\}$?

Exercice 6.29 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, associe:

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}).$$

a) Montrer que pour tout z <u>réel</u>, $f(z) = \cos(z)$.
b) Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer que $f(z + 2\pi) = f(z)$, que $f(-z) = f(z)$, et que $f(2z) = 2(f(z))^2 - 1$.
c) f est-elle injective ?
d) Calculer $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 6.30 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par:

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \; f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

a) L'application f est-elle injective? surjective?
b) Calculer l'image réciproque de $\{i\}$ par f.
c) Déterminer l'image directe du cercle unité U par f.
d) On note H le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du segment $[-1,1]$, et on note D l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1\}$. Montrer que l'on peut définir l'application:

$$\begin{array}{rcl} g : D & \longrightarrow & H \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

e) Montrer que g est bijective. (On pourra remarquer que le produit des racines de l'équation $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ est 1).

7 Les nombres entiers et les nombres rationnels

Exercice 7.1 Soit n un entier naturel dont le reste de la division euclidienne par 5 vaut 2 ou 3, montrer que n^2+1 est divisible par 5.

Exercice 7.2 Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, 4 ne divise pas n^2+1.

Exercice 7.3 Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

1. $n \mid n+8$
2. $n-3 \mid n^3-3$

Exercice 7.4 Que valent $pgcd(a,b)$ et $ppcm(a,b)$ dans les cas suivants ?

1. $a=6$, $b=12$;
2. $a=3$, $b=5$;
3. $a=12$, $b=18$.

Vérifier que dans ces exemples $pgcd(a,b) \times ppcm(a,b) = ab$.

Exercice 7.5 Déterminer $pgcd(a,b,c)$ et $ppcm(a,b,c)$ dans les cas suivants :

1. $a=b=c=2$;
2. $a=2$, $b=4$, $c=6$;
3. $a=2$, $b=3$, $c=5$;
4. $a=120$, $b=60$, $c=24$;
5. $a=60$, $b=45$, $c=18$.

A-t-on toujours $pgcd(a,b,c) \times ppcm(a,b,c) = abc$?

Exercice 7.6 Calculer $pgcd(1863, 368, 14375)$ et $ppcm(1863, 368, 14375)$.

Exercice 7.7 Quel est le pgcd de $17^{63}-1$ et $17^{42}-1$?

Exercice 7.8 Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Démontrer que $pgcd(a,b,c) = pgcd(pgcd(a,b),c)$ et $ppcm(a,b,c) = ppcm(ppcm(a,b),c)$.

Exercice 7.9 Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les entiers n et $n+1$ sont premiers entre eux, i.e. $pgcd(n,n+1)=1$. Y-a-t-il d'autres entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, n et $n+k$ sont premiers entre eux ?

Exercice 7.10 Soit k un entier naturel. Montrer que $9k+4$ et $2k+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 7.11 Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $27x+45y=63$.

Exercice 7.12 1) A partir de l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $35u_0+13v_0=1$.
2) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (u,v) tels que $35u+13v=1$.

Exercice 7.13 Déterminer tous les couples d'entiers n, m tels que

$$1 \leq n \leq m, \ m+n=256 \text{ et } pgcd\{n,m\}=16\ .$$

Exercice 7.14 Soit $n \geq 1$ un nombre entier. En s'inspirant de l'algorithme d'Euclide, montrer que la fraction rationnelle $\dfrac{15n^2+8n+6}{30n^2+21n+13}$ est irreductible.

8 Polynômes

Dans toute la feuille, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 8.1 Effectuer les divisions euclidiennes de A par B pour les polynômes A et B suivants:

1. $A = X^3 + 6X^2 + 2X + 5$, $B = 2X^2 + 4$;
2. $A = X^7 + 2X^5 + 7X^3 + 15X + 2$, $B = X^3 + 2X$;
3. $A = X^4 + 1$, $B = X^2 + 1$;
4. $A = 2X^3 + 17X^2 - 7X + 2$, $B = 2X^5 - 1$.

Exercice 8.2 Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On considère la relation $\mathcal{R}$ suivante sur $\mathbb{K}[X]$: pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$,

$$P \,\mathcal{R}\, Q \Leftrightarrow B \mid (P - Q)$$

Montrer que $P \,\mathcal{R}\, Q$ si et seulement si P et Q ont même reste dans la division euclidienne par B. En déduire que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 8.3 Soient a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ en fonction de a, $P(a)$ et $P'(a)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division de $P_n = X^n + X + b$ par $(X-a)$?

Exercice 8.4 Calculer le reste de la division euclidienne de A par B où $n \geq 2$, $A = X^n + X + 1$ et $B = (X-1)^2$? Pour p et q entiers tels que $p > q$, quel est le reste de la division de $X^p + X^q + 1$ par $X^2 + X$?

Exercice 8.5 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivant :

$$P_1(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2,\ \ P_2(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1,\ \ P_3(X) = X^4 + X^2 + 1,$$

$$P_4(X) = X^8 + X^4 + 1,\ \ P_5(X) = X^2 - 2X\cos(\theta) + 1,\ \ P_6(X) = X^4 - 2X^2\cos(2\theta) + 1.$$

Exercice 8.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivant :

$$Q_1(X) = X^n - 1,\ \ Q_2(X) = 2X^n - 2,\ \ Q_3(X) = X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1,$$

$$Q_4(X) = X^n + 1,\ \ Q_5(X) = X^{2n} - 1.$$

Exercice 8.7 Soit $A(X) = X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$ et $B(X) = X^3 - 2X + 1$. Peut-on déterminer a et b pour que B divise A?

Exercice 8.8 Factoriser le polynôme réel

$$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!}\ .$$

Faire un raisonnement par récurrence.

Exercice 8.9 Montrer qu'un polynôme réel de degré 3 admettant une racine double dans $\mathbb{C}[X]$ a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8.10 Soient p et q deux réels fixés et $A(X)$ le polynôme $A = X^3 + pX + q$. Montrer que A admet au moins une racine réelle. Déterminer en fonction de (p, q) le nombre de racines réelles de A.

Exercice 8.11 Déterminer le degré du polynôme $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que P est divisible par $(X - j)^2$ où $j = e^{2i\pi/3}$. Déterminer deux racines réelles entières de P en précisant les ordres de multiplicité. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.12 Soit $P(X) = X^3 - 3X + 1$ et soient a, b, c les trois racines de P dans $\mathbb{C}[X]$. On ne cherchera pas à calculer ces racines. Montrer que a, b et c sont distinctes. Calculer $A = a + b + c$, $B = ab + ac + bc$ et $C = abc$.

Exercice 8.13 Quel est l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine du polynôme $P(X) = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$?

Exercice 8.14 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme à coefficients complexes $P(X) = X^4 + aX^3 + b$ admette une racine multiple.

Exercice 8.15 Soit $n \geq 3$. Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $P(1) = 3$, $P'(1) = 4$, $P''(1) = 5$ et $P^{(k)}(1) = 3$ si $k \in \{3, .., n\}$. Un tel polynôme est-il unique ?

Exercice 8.16 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient P_0, P_1,...,P_n dans $\mathbb{K}[X]$ tels que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $deg(P_k) = k$. On dit qu'un polynôme P est une combinaison linéaire des polynômes P_0,...,P_n s'il existe des scalaires λ_0,...,λ_n tels que $P(X) = \lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n$. Dans ce cas, on dit que cette écriture est unique si pour tous scalaires μ_0,...,μ_n tels que $P = \mu_0 P_0 + ... + \mu_n P_n$, on a $\mu_k = \lambda_k$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Le but de cet exercice est de montrer que tout polynôme de degré au plus n peut s'écrire, et de façon unique, comme combinaison linéaire des polynômes P_0, P_1,...,P_n.

Soit $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], deg(P) \leq n\}$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

a) Si $n \geq 1$, montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $P - \lambda_n P_n \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

b) En déduire qu'il existe des scalaires λ_0,...,λ_n tels que $P = \lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n$.

c) Montrer que cette écriture est unique.

Exercice 8.17 Soit
$$P(X) = \frac{X^n(4 - 2X)^n}{n!}$$
où n est un entier strictement positif.

a) Montrer que les $n - 1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = 0$ et $x = 2$.

b) Ecrire la formule de Taylor pour P au point 0 et au point 2.

c) En déduire que toutes les dérivées de P prennent des valeurs entières pour $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 8.18 Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X + 2) + P(X^2) = 0$. (On montrera que si α est racine de P, alors α^2 aussi, puis que la seule racine possible est 1.)

Exercice 8.19 En développant de deux façons différentes le polynôme
$$P = (X + 1)^{(p+q)} = (X + 1)^p (X + 1)^q \ ,$$
montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \forall q \geq n$,
$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} \binom{q}{n-k}.$$
(Cette égalité est connue sous le nom d'égalité de Van der Monde.)

Exercice 8.20 Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.

Exercice 8.21 Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$. Vérifier que i est racine de P. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.22 Prouver que B divise A, où :
$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$,
$A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$,
$A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$.

Exercice 8.23 Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.24 Montrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{2n} - 2X^n \cos n\theta + 1$.

Exercice 8.25 On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 6X^3 + 16X^2 + 22X + 15$.
i) Déterminer deux scalaires λ et μ tels que

$$P(X) = (X^2 + 3X + \lambda)^2 - (X + \mu)^2 .$$

ii) En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.26 On considère les deux polynômes $P(X) = X^4 + 1$ et $Q(X) = X^3 + 1$.
i) Calculer les racines de P et Q (dans $\mathbb{C}$) sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
ii) Décomposer P et Q en produit de polynôme irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
iii) Calculer le pgcd de P et Q.
iv) En déduire un couple (U, V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré ≤ 3 tel que $PU + QV = 1$.

Exercice 8.27 Soit $A(X) = X^6 + aX^4 + bX^3 + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.
i) Déterminer a, b, c tels que 1 soit racine double de A et j soit racine de A.
ii) Montrer alors que $A \in \mathbb{R}[X]$ et que j est racine double.
iii) Décomposer A en produits de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8.28 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants en facteurs irréductibles :

$$X^3 + 1 \qquad X^3 - 1 \qquad X^3 + 2X^2 + 2X + 1$$

$$X^4 + 1 \qquad X^4 + X^2 + 1 \qquad 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$$

Exercice 8.29
1. Montrer *sans calcul* que le polynôme $(X+1)$ divise les polynômes $X^5 + 1$ et $X^3 + 1$.
2. Calculer explicitement les polynômes $P_1(X) = \frac{X^5+1}{X+1}$ et $P_2(X) = \frac{X^3+1}{X+1}$.
3. Montrer que P_1 et P_2 sont premiers entre eux.
4. En déduire le pgcd de $X^5 + 1$ et $X^3 + 1$.
5. Calculer le ppcm de $X^5 + 1$ et $X^3 + 1$.

9 Matrices

Exercice 9.1 On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux lorsqu'ils existent.

Exercice 9.2 Comparer AB et BA pour les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.3 Soient A et B deux matrices. A quelle condition les matrices AB et BA existent-elles toutes les deux ? A quelle condition ont-elles le même format ?

Exercice 9.4 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n,1}$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ une matrice de $M_{1,n}$. Vérifier que les deux produits UX et XU sont possibles et calculer les.

Exercice 9.5 Soit A une matrice de $M_{n,p}$.

a) Si I_n est la matrice unité d'ordre n, montrer que $I_nA = A$ puis que $AI_p = A$.

b) Soit E_{ij} la matrice élémentaire de M_n dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j, qui vaut 1. Calculer $E_{ij}A$. On note ici F_{ij} la matrice élémentaire de M_p définie de manière analogue. Calculer AF_{ij}.

Exercice 9.6 a) Déterminer deux matrices A et B de $M_2(I\!R)$ telles que :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calculer AB et BA. A-t-on $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 9.7 Puissance de matrice et formule du binôme : Soit A une matrice de M_n. On définit les puissances de A par récurrence :

$$A^0 = I_n \ , \ A^1 = A \text{ et } \forall p \in I\!N, \ \ A^{p+1} = A^pA = AA^p.$$

On dit que deux matrices A et B de M_n commutent si $AB = BA$. Montrer que si A et B commutent, la formule du binôme de Newton est vraie :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Exercice 9.8 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = A - I_3$. Pour tout $n \in I\!N$, calculer J^n, puis A^n.

Exercice 9.9 Soit $x \in I\!R$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 9.10 Soient A et B deux matrices de M_n. Effectuer les produits :

$$(A+B)^2\ ,\ (A-B)(A+B)\ ,\ (A-B)^2\ ,\ (AB)^2 \text{ et } (I+A+\ldots+A^k)(I-A).$$

Exercice 9.11 Soient A et B deux matrices de M_n triangulaires inférieures. Montrer que leur somme et leur produit sont aussi triangulaires inférieures.

Exercice 9.12 Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée de M_n. On appelle trace de A, et on note $tr(A)$ le nombre réel :

$$tr(A)=\sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Montrer que : $\forall A \in M_n$, $\forall B \in M_n$, $\forall \lambda \in I\!R$,

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B), \qquad tr(\lambda A)=\lambda tr(A), \qquad tr(AB)=tr(BA).$$

Exercice 9.13 Soient A et B deux matrices carrées réelles, de format $n\times n$, avec $tr(A)\neq -1$. Déterminer les matrices $X\in M_n(I\!R)$ telles que

$$X+(tr(X))A=B\ .$$

Exercice 9.14 1) Soit X une matrice colonne à coefficient réels. Calculer X^TX. Montrer que $X^TX=0$ si et seulement si $X=0$.

2) Soit A une matrice à coefficient réels et X une matrice colonne à coefficient réels telle que le produit AX existe. Montrer que $AX=0$ si et seulement si $X^TA^TAX=0$.

3) Montrer qu'ainsi énoncé ces résultats sont faux pour des matrices à coefficients complexes. Comment peut-on les géneraliser au cas des matrices à coefficients complexes ?

Exercice 9.15 a) Montrer que, pour toute matrice A de $M_{n,p}$, les produits $A(A^T)$ et $(A^T)A$ sont des matrices carrées symétriques. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AA^T et A^TA.

b) Montrer que toute matrice carrée B peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique T. Déterminer S et T si $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.16 Soient n dans $I\!N^*$ et A une matrice de $M_n(I\!R)$ non nulle (c'est-à-dire différente de la matrice nulle) et symétrique.

1) Montrer que A^2 est symétrique.

2) Exprimer les coefficients de A^2 en fonction de ceux de A.

3) Montrer que la trace de A^2 est strictement positive, puis en déduire que A^2 est non nulle.

4) Montrer que pour tout k de $I\!N^*$, A^k est non nulle.

Exercice 9.17 La somme de deux matrices inversibles est-elle toujours inversible ?

Exercice 9.18 Déterminer l'inverse (quand il existe) des matrices suivantes par la méthode du pivot :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.19 a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A n'est pas inversible. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice N telle que : $B = I + N$, puis calculer $(I-N)(I+N)$. En déduire que B est inversible et calculer son inverse, puis B^{100}.

Exercice 9.20 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer en fonction de n et des termes initiaux les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par u_0, v_0 et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 5u_n - 2v_n \end{cases}$$

Exercice 9.21 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - 6A^2 + 12A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 9.22 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que:

$$A^2 + A + I = 0.$$

a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = -A - I$.

b) Montrer que $A^3 = I$.

c) Calculer, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p en fonction de A et I.

Exercice 9.23 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 puis A^3.

b) A est-elle inversible ?

c) On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $(A+I)^{10}$.

d) On considère les suites les suites réelles (u_n), (v_n) et w_n définies par u_0, v_0 et w_0 et par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = v_n \end{cases}$$

Calculer v_{10} quand $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = -1$.

Exercice 9.24 *(suite des noyaux)* Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$. On pose appelle noyau de A et on note $\operatorname{Ker} A$ l'ensemble des vecteurs colonnes X à n composantes tels que $AX = 0$:

$$\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$$

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(A^k) \subset \mathrm{Ker}(A^{k+1})$.

2) Soit k un entier naturel tel que $\mathrm{Ker}(A^{k+1}) = \mathrm{Ker}(A^k)$. Montrer que pour tout entier $q \geq k$, $\mathrm{Ker}(A^q) = \mathrm{Ker}(A^k)$.

3) En déduire que si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A^2X = 0 \Leftrightarrow AX = 0$, alors pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $A^kX \Leftrightarrow AX = 0$.

Exercice 9.25 *(racines carrés de matrices)* Définition: Soit A et M des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On dit que M est une racine carrée de A si M^2 est bien définie et $M^2 = A$.

a) Soit M une matrice. Montrer que le produit MM n'est défini que si M est une matrice carrée. En déduire que si une matrice A a une racine carrée (ou cubique d'ailleurs), alors A est carrée.

b) Montrer que la matrice suivante n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais a exactement deux racines carrées dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

d) Dans $M_2(\mathbb{R})$, montrer que la matrice I_2 a une infinité de racines carrées dont les coefficients diagonaux sont nuls.

e) Déterminer toutes les racines carrées de la matrice I_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner un exemple de racine carrées de I_2 dans $M_2(\mathbb{C})$ qui n'appartient pas à $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9.26 On considère des matrices à coefficients réels. Soit A une matrice $n \times p$. On appelle noyau de A l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ telles que $AX = 0$. On appelle image de A l'ensemble des matrices colonnes $B \in \mathcal{M}_{n,1}$ telles que le système linéaire $AX = B$ ait au moins une solution. Déterminer le noyau et l'image des matrices suivantes. A chaque fois, calculer la somme du nombre de "degrés de liberté" du noyau et de l'image et comparer avec le nombre de colonnes de A. Que constatez-vous ?

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 9.27 Pour les matrices carrées A de l'exercice précédent (donc toutes sauf la 7)), déterminer les réels λ tels que le système linéaire $AX = \lambda X$ ait (au moins) une solution X non nulle. Pour chacune de ces valeurs de λ, résoudre le système $AX = \lambda X$.

10 Systèmes linéaires

Exercice 10.1 Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$1)\ \left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array}\right.$$

$$3)\ \left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 10+2i \\ 2x_1 & + & (4+2i)x_2 & = & 6+2i \end{array}\right.$$

Exercice 10.2 Déterminer en fonction de la valeur des paramètres a et b le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$1)\ \left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{ccccc} 2ax_1 & + & ax_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array}\right.$$

Exercice 10.3 Un système linéaire peut-il avoir exactement trois solutions ? Pourquoi ?

Exercice 10.4 Un système linéaire de n équations à n inconnues a-t-il toujours exactement une solution ? au moins une solution ? au plus une solution ?

Exercice 10.5 a) Considérons un système linéaire de 7 équations à 5 inconnues dont le rang est 4. Ce système a-t-il nécéssairement au moins une solution ? au plus une solution ? Ce système peut-il avoir une solution unique ?

b) Mêmes questions pour un système de 7 équations à 5 inconnues de rang 5

c) Mêmes questions pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 4, puis pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 5.

Exercice 10.6 Résoudre les systèmes linéaires figurant dans le polycopié sur les systèmes linéaires (i.e. pour vous entrainer, résoudre vous même les systèmes du polycopié, et ne vérifier en regardant les solutions qu'à la fin).

Exercice 10.7 Résoudre les systèmes suivants (pour les deux derniers, résoudre en fonction de la valeur des paramètres réels a, b et m).

$$1)\ \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +z & = & 4 \\ -2x & +y & -2z & = & -4 \end{array}\right. \qquad 2)\ \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +2z & = & 4 \\ -2x & +y & -z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$3)\ \left\{\begin{array}{cccccc} x & -2y & +3z & -4t & = & 4 \\ & y & -z & +t & = & -3 \\ x & +3y & & -3t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -4t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$4)\ \left\{\begin{array}{cccc} x & +y & +2z & =1 \\ x & +2y & +z & =2 \\ 3x & +4y & +5z & =a \\ & y & +3z & =b \end{array}\right. \qquad 5)\ \left\{\begin{array}{ccccc} x & +y & +(2m-1)z & = & 1 \\ mx & +y & +z & = & -1 \\ x & +my & +z & = & 3(m+1) \end{array}\right.$$

11 Annales

Nous donnons les cc1, cc2, partiel et examen de l'année dernière. Dans tous les cas, les documents, calculatrices et portables sont interdits. Sauf mention explicite, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Algèbre Linéaire 1 - Contrôle continu 1 du 13/10/2016
Durée 1 heure 30 minutes

Exercice 1 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on considère les quatre propositions suivantes :

- P : $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = C.$
- Q : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$
- R : $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y.$
- S : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$

1. Donner les négations de P, Q, R et S.
2. Quelle est la proposition qui exprime que f est constante sur $\mathbb{R}$?
3. L'application f est définie par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = x^3 - 2x.$$
   (a) Tracer le graphe de f.
   (b) Parmi les quatre propositions P, Q, R et S lesquelles sont vraies? On demande de bien justifier la réponse.

Exercice 2 On pose pour tout couple d'entiers $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,
$$a_{ij} = \alpha\, i + \beta\, j \text{ où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, déterminer α et β en fonction de n sachant que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \text{ et } \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} = 0.$$

Dans ce cas, déterminer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exercice 3 Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles.

1. Démontrer que
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{n+1} \backslash A_n) \subset \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \backslash \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$
2. Démontrer l'égalité si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante c'est-à-dire pour tout entier n, $A_n \subset A_{n+1}$.
3. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ A_n = [0, 1/n[\text{ et } A_0 = [0, 1[.$$
   Montrer qu'il n'y a pas égalité dans l'inclusion de la question 1.

Exercice 4 Soient $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux applications telles que

$$f \circ g \circ f = \mathrm{Id}_E.$$

1. Prouver que f est bijective.
2. Est-ce que g est aussi bijective ?
3. Dans l'affirmative, déterminer g^{-1} en fonction de f.

Exercice 5 Soit $f : E \to F$ une application. On définit l'application

$$\begin{array}{rccc} f^* : & \mathcal{P}(F) & \to & \mathcal{P}(E) \\ & B & \mapsto & f^*(B) = f^{-1}(B) \end{array}$$

1. (a) Montrer que si f est surjective, alors

$$\forall B \subset F, \;\; f(f^{-1}(B)) = B.$$

   (b) En déduire que si f est surjective, alors f^* est injective

2. On suppose que f^* est injective. Soit $y \in F$, on pose $B = \{y\} \subset F$.
   (a) Que signifie $f^{-1}(B) = \emptyset$?
   (b) Montrer que si $f^{-1}(B) = \emptyset$ alors $B = \emptyset$.
   (c) En déduire que si f^* est injective, alors f est surjective

Algèbre Linéaire 1 - Contrôle continu 2 du 8/12/2016
Durée 1 heure 30 minutes

Exercice 6 α étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ et on considère le polynôme $P(X)$ défini par :

$$P(X) = X^3 - (1 - 2\sin\alpha)X^2 + (1 - 2\sin\alpha)X - 1.$$

1. Calculer $P(1)$.

2. En déduire l'existence de trois nombres réels a, b, c tels que :

$$P(X) = (X - 1)(aX^2 + bX + c).$$

   Déterminer a, b, c.

3. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$.

4. On considère trois nombres complexes :

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha, \quad \text{et } z_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha.$$

   Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

Exercice 7 1. Prouver que l'équation $2x + 4y = 1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2. Déterminer tous les nombres $k \in \mathbb{N}$ tel que l'équation $2x + 4y = k$ est résoluble dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3. Soit k un entier, trouver toutes les solutions de $2x + 4y = 2k$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Exercice 8 Soient $(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$

1. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) = A^2 + B^2.$$

   Indication : on pourra introduire les complexes $z_k = a_k + ib_k$ et exprimer le produit en fonction des z_k, $1 \leq k \leq n$.

2. Application : Vérifier que $41 = 5^2 + 4^2$ et que $5 = 2^2 + 1$, puis écrire 205 comme somme de deux carrés.

Exercice 9 On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} X^k.$$

1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; (X - 1)P_n(X) = X^{n+1} - 1.$$

2. En utilisant la dérivation, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; (1 - X)\sum_{k=1}^{n} kX^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} X^k - nX^n.$$

3. On suppose maintenant que z est une racine n-ième de l'unité, $n \geq 1$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \left(kz^{k-1}\right).$$

(On exprimera le résultat en fonction de n et de z à la puissance 1 seulement.)

Exercice 10 On pose pour tout entier naturel n non nul

$$P_n(X) = 2X^2 + (4n-3)X + 2n^2 - 5n.$$

1. Montrer que pour tout entier n non nul, P_n a deux racines réelles distinctes et donner une expression de ces deux racines en fonction de n.

2. On se propose de trouver les valeurs de n pour lesquelles ces racines sont des nombres rationnels.

   (a) On suppose que les racines de P_n sont des rationnels.

      i. Soit a un nombre entier naturel, démontrer l'équivalence suivante

      $$\sqrt{a} \in Q \Longleftrightarrow \sqrt{a} \in I\!N.$$

      ii. En déduire que $16n + 9$ est le carré d'un entier naturel p .

      iii. Montrer que le reste de la division de p par 8 est égal à 3 ou à 5.

   (b) En déduire la forme générale des entiers n cherchés et donner les valeurs de n strictement inférieure à 30.

Algèbre Linéaire 1 - Partiel du 7/11/2016
Durée 2 heures

Les documents, calculatrices et portables sont interdits. Sauf mention explicite, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Les exercices sont indépendants.

Exercice 11

1. Ecrire sous forme trigonométrique
$$z_1 = 1 + i \text{ et } z_2 = \sqrt{3} + i.$$
2. En déduire la forme trigonométrique de $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$.
3. Justifier que
$$\cos(\pi/12) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$
4. Que vaut alors $\tan(\pi/12)$?

Exercice 12 Soit n un entier non nul. On pose
$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j| \text{ et } A_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} |i-j|\,.$$

1. Vérifier que $S_1 = 0$ puis que $S_2 = 2$.
2. Calculer A_n.
3. En déduire S_n en l'exprimant en fonction de A_n.

On rappelle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 13 Soit θ un réel de $[0,\pi[$ et n un entier non nul, on pose
$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos^k(\theta)\cos(k\theta) \text{ et } T_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \cos^k(\theta)\sin(k\theta).$$

1. On considère le complexe $a = \cos(\theta)e^{i\theta}$.
   (a) Donner la partie réelle et la partie imaginaire de a en fonction de θ.
   (b) Calculer le module de a en fonction de θ et donner un argument de a en fonction de θ.
   (c) Montrer que
   $$1 - a = \sin(\theta)e^{i(\theta-\pi/2)}.$$
   (d) Déterminer la ou les valeurs de θ pour lesquelles $a = 1$.
2. Calculer $S_n(\theta) + iT_n(\theta)$ en fonction de n et de θ.
3. En déduire $S_n(\theta)$ en fonction de n et de θ.

Exercice 14 Soit un entier $n > 1$, on considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par
$$\forall z \in \mathbb{C},\quad f(z) = z^n - \overline{z}.$$

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire que f n'est pas injective.
2. On pose $A = f^{-1}(\{0\})$. Soit z un élément non nul de A.
   (a) Montrer que le module de z est 1.
   (b) Déterminer A. Quel est son cardinal ?

Exercice 15 On considère l'équation

$$z^3 - (6+3i)z^2 + (9+12i)z - 9(2+3i) = 0. \quad (E)$$

1. Démontrer que E admet une solution imaginaire pure unique z_1 que l'on calculera.
2. Déterminer les autres solutions de E, notées z_2 et z_3.
3. Montrer que
$$|z_3 - z_2| = |z_2 - z_1| = |z_1 - z_3| .$$
4. On appelle A_1, A_2 et A_3 les points du plan d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. Que dire du triangle (A_1, A_2, A_3) ?

Université de Paris-Dauphine
Année universitaire 2016-2017
Algèbre Linéaire 1, DUMI2E

Algèbre Linéaire 1 - Examen du 17/01/2017
Durée 2 heures

Les documents, calculatrices et portables sont interdits. Sauf mention explicite, les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte. Les exercices sont indépendants.

Exercice 16 Soit $a \in]-1;1[$, on note D l'ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq 1\}.$$

1. Montrer que pour tout $z \in D$, $|1 - az| \neq 0$.
2. Montrer que
$$\forall z \in D, |z - a| \leq |1 - az|.$$
Donner une condition nécéssaire et suffisante sur z pour avoir l'égalité.
3. On définit ainsi, pour tout réel $a \in]-1;1[$, une application f_a de D dans D telle que
$$\forall z \in D, \quad f_a(z) = \frac{z - a}{1 - az}.$$
   (a) Monter que f_a est une application bien définie de D dans D.
   (b) Montrer que f_a est bijective de D dans D et déterminer la bijection réciproque.

Exercice 17 Soit A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$ qui vérifient

$$AB = A + B.$$

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A - I_n$ est inversible et que
$$(A - I_n)^{-1} = B - I_n.$$
2. En déduire que A et B commutent.
3. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Calculer $(A - I_3)^2$, en déduire que $A - I_3$ est inversible et déterminer la matrice B.
4. Montrer que si A est inversible, alors B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction de A, A^{-1} et I_n.
5. Soit A une matrice nilpotente c'est-à-dire il existe un entier n tel que $A^n = 0$. Montrer que
$$B = -\sum_{k=1}^{n-1} A^k.$$

Exercice 18 On considère trois polynômes A, B et C **à coefficients réels de degré 2** qui vérifient

$$A^2(X) + B^2(X) = C^2(X).$$

1. (a) Montrer que si deux de ces trois polynômes admettent une racine commune (réelle ou complexe), alors cette racine est aussi racine du troisième polynôme.

   (b) Montrer que si les polynômes $B - C$ et $B + C$ ont une racine commune, alors cette racine est également racine de B et de C.

   On suppose dans toute la suite que les trois polynômes A, B et C n'ont pas de racines communes.

2. On note $A = K(X - p)(X - q)$ où K, p et q sont des complexes. Montrer que K est un réel et que p et q, les racines de A, sont soit des réels soit des complexes conjugués.

3. (a) Démontrer que C n'a pas de racines réelle. En déduire que C admet deux racines distinctes complexes conjuguées.

   (b) A partir de l'égalité
   $$A^2 = (C - B)(C + B),$$
   démontrer que les polynômes $C - B$ et $C + B$ ont chacun une racine double réelle.

   (c) En déduire que A et B admettent chacun deux racines réelles distinctes.

4. On prend $K = 1$, on suppose connues p et q, les racines de A. Montrer qu'il existe une infinité de polynômes B et C dépendant d'un paramètre.