ANALYSE 3

Cours de Licence MIE, 2ème année

Département MIDO

Année universitaire 2017-2018

Olivier Glass

Sur la base des notes de Pierre Cardaliaguet et Daniela Tonon

Table des matières

Le polycopié qui suit peut avoir des différences notables avec le cours dispensé en amphi (qui seul fixe le programme de l'examen). Il comporte des passages qui ne seront pas traités en amphi, et a contrario dans ce dernier pourront être donnés des compléments ne figurant pas dans ces notes, les preuves être plus détaillées, etc.

Les trois derniers chapitres apportent des rappels (qui ne prétendent pas être exhaustifs) de première année. La maîtrise de ces outils de première année est **indispensable** pour pouvoir bien aborder ce cours de deuxième année. Il est donc fortement conseillé de lire ces chapitres régulièrement pour s'assurer que ces notions sont bien acquises.

Chapitre 1

Préliminaire : Suites de Cauchy

Introduction. Ce court chapitre introduit une notion essentielle en analyse : celle des suites de Cauchy. Pour les suites numériques (et plus tard, pour des suites à valeurs dans d'autres espaces), cela est en effet un outil fondamental qui permet de montrer qu'une suite converge, sans connaître sa limite.

1.1 Deux résultats connus sur les suites numériques

Il est très souvent utile de montrer qu'une suite converge *sans connaître sa limite à l'avance.* Cela permet par exemple de montrer l'existence de réels satisfaisant certaines propriétés, en les introduisant comme la limite de suites dont on montre qu'elles convergent à l'aide de théorèmes connus. Montrer qu'une suite est de Cauchy sera précisément un moyen pour montrer qu'une suite converge.

Avant d'introduire cette notion, rappelons deux résultats qui, eux aussi, montrent qu'une suite (ou une sous-suite) converge, sans connaître sa limite. Ces deux résultats ont été vus en première année et peuvent être considérés comme des conséquences de la propriété de la borne supérieure ou du théorème des segments emboîtés (voir le Chapitre 7).

Théorème 1.1. *Toute suite croissante et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une limite finie.*

Théorème 1.2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit* (x_n) *une suite bornée de réels. Alors* (x_n) *possède une sous-suite qui converge.*

1.2 Suites de Cauchy

Venons-en à l'objet principal du chapitre. La définition suivante sera très souvent utilisée dans ce cours.

Définition 1.3. *On dit qu'une suite* (x_n) *est de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ |x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon\ .$$

Heuristiquement, cela signifie que les termes de la suite sont proches les uns des autres lorsque n est grand. On montre facilement que :

Proposition 1.4. *Toute suite qui admet une limite finie est de Cauchy.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite qui admet une limite finie l. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |x_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

On a donc que, pour le même $n_0, \forall n \geq n_0$,

$$\forall p \geq 0,\ |x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - l| + |l - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

□

Proposition 1.5. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ |x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon\ .$$

En particulier pour $\varepsilon = 1$

$$\exists n_0,\ \forall p \geq 0,\ |x_{n_0+p} - x_{n_0}| \leq 1\ .$$

Donc, à partir du rang n_0, les termes de la suite appartiennent à une boule de rayon 1 et centre x_{n_0}. Par conséquent, la suite (x_n) est bornée vu que les termes $x_0, \ldots x_{n_0-1}$ sont en nombre fini. □

La complétude de $\mathbb{R}$, propriété essentielle décrite dans le résultat suivant, peut être vue comme une conséquence du Théorème 1.2.

Théorème 1.6. *Dans $\mathbb{R}$, toute suite de Cauchy est une suite convergente.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Grace à la Proposition 1.5, elle est bornée et grace aux Théorème 1.2 elle possède une sous-suite qui converge. Soit ϕ la fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui identifie la sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$ et soit $l \in \mathbb{R}$ sa limite.

Alors $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists n_0,\ \forall n \geq n_0,\ |x_{\phi(n)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ ,$$

et

$$\exists n_1,\ \forall n \geq n_1,\ \forall p \geq 0,\ |x_{n+p} - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Or, $\forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$, vu que $\phi(n) \geq n, \forall n \in \mathbb{N}$ car ϕ est strictement croissante,

$$|x_n - l| \leq |x_n - x_{\phi(n)}| + |x_{\phi(n)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ ,$$

et donc (x_n) converge. □

Remarque. *Le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. Autrement dit, il existe des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne sont pas convergentes. N'importe quelle suite de rationnels qui converge vers un irrationnel est de Cauchy (parce qu'elle admet une limite finie dans $\mathbb{R}$) mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, car la limite n'y appartient pas.*

Chapitre 2

Séries numériques

Introduction. Dans cette partie on s'intéresse aux séries numériques, c'est-à-dire aux suites de la forme $(\sum_{k=0}^{n} x_k)$, où (x_k) est elle-même une suite numérique. Nous limiterons les énoncés au cas des séries de terme général réel (i.e., $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout n). Cependant les séries de terme général complexe ($x_n \in \mathbb{C}$ pour tout n) se traitent exactement de la même façon, à condition de remplacer la valeur absolue par le module.

2.1 Séries numériques : vocabulaire et propriétés fondamentales

Définition 2.1. *On appelle série numérique une suite dont le terme général S_n est de la forme*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

où (x_n) est une suite numérique, i.e., une suite à termes réels.

Vocabulaire. Le réel x_n s'appelle le **terme général** de la série, (S_n) la suite de ses **sommes partielles**.

Remarque. *Il arrive que la suite (x_n) ne soit définie qu'à partir d'un certain rang n_0 : par exemple, la suite de terme général $1/n$ n'est définie qu'à partir de $n_0 := 1$. Dans ce cas, on étudie les sommes partielles sont définies par*

$$S_n = x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n = \sum_{k=n_0}^{n} x_k \qquad \forall n \geq n_0 \, .$$

Par exemple, pour la série de terme général $x_n = 1/n$, on considère la suite des sommes partielles (S_n) définie par

$$S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n \qquad \forall n \geq 1.$$

Pour simplifier la présentation, on supposera dans tous les énoncés que le terme général de la série est défini pour tout $n \geq 0$, tous les résultats pouvant être adaptés de façon immédiate au cas général.

Définition 2.2. *On dit que la* **série** *de terme général* x_n **converge** *si la suite des sommes partielles* (S_n) *définie par*

$$S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

admet une limite réelle. Dans ce cas, on appelle ***somme de la série de terme général*** x_n *la limite de la suite* (S_n)*, et la note* $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ *:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Si la série de terme général ne converge pas, on dit qu'elle **diverge***.*

Exemple. *Si* $x_n = a^n$ *avec* $a \neq 1$*, alors on montre par récurrence que la somme des* n *premiers termes d'une suite géométrique est donnée par*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Par conséquent la série de terme général a^n *converge si et seulement si la suite* (S_n) *de terme général* $S_n = (1-a^{n+1})/(1-a)$ *possède une limite réelle, i.e., si et seulement si* $|a| < 1$*. Dans ce cas*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

On note que si $a > 1$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$*, tandis que si* $a \leq -1$*, alors* S_n *ne possède pas de limite. Enfin, dans le cas où* $a = 1$*, on a* $S_n = n+1$ *et donc* $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ *: la série de terme général* $x_n = 1$ *ne converge donc pas.* □

Commençons par quelques propriétés simples et fondamentales.

Proposition 2.3. *Si la série de terme général* x_n *converge, alors la* **suite** *de terme général* x_n *converge vers* 0*. Si la* **suite** (x_n) *ne tend pas vers* 0*, alors la* **série** *de terme général* x_n *diverge.*

Exemple. *Une série dont le terme général est constant ne converge que si son terme général est nul.*

Remarque. *Attention ! La réciproque de cette proposition est fausse : la série de terme général* $1/n$ *ne converge pas (voir plus loin), alors que la suite* $(1/n)$ *tend vers* 0*...*

Démonstration de la proposition. Nous observons pour commencer que la seconde assertion de l'énoncé est la contraposée de la première. Montrons donc cette première assertion. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série. Comme la série converge, la suite (S_n) possède une limite finie, et est donc de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ |S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon\ .$$

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ et pour $p = 1$,

$$|x_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| \leq \varepsilon\ .$$

Donc (x_n) tend vers 0. □

Proposition 2.4 (Linéarité)**.** *Si les séries de terme général x_n et y_n convergent, et si λ et μ sont deux nombres réels, alors la série de terme général $\lambda x_n + \mu y_n$ converge et sa somme vaut*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} y_n \ .$$

Démonstration. La preuve est immédiate par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$ dans l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda \sum_{n=0}^{N} x_n + \mu \sum_{n=0}^{N} y_n \ .$$

□

Une des questions majeures lorsque l'on étudie une série réelle est de savoir si celle-ci converge ou non. En effet, le calcul exact de la limite est la plupart du temps difficile, voire impossible. Pour savoir si une série converge ou non, on utilise des "critères de convergence", i.e., des règles "simples" permettant de décider si la série converge, ou non.

Avant d'établir ces règles, il nous faut mieux comprendre le problème. Montrons d'abord que la question de la convergence d'une série ne dépend que de comportement à l'infini (c'est-à-dire pour "n grand") :

Proposition 2.5. *On considère deux séries, de terme général x_n et y_n respectivement. On suppose que les suites (x_n) et (y_n) coïncident "pour tout n assez grand" : autrement dit, on suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n = y_n$. Alors la série de terme général x_n converge si et seulement si la série de terme général y_n converge.*

Démonstration. Notons la suite des sommes partielles de (x_n) par (S_n) et celle de (y_n) par (S'_n). Pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$S'_n = S_n + \sum_{k=0}^{n_0-1} y_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k,$$

et donc les suites (S_n) et (S'_n) ne diffèrent que de la constante $\sum_{k=0}^{n_0-1} y_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k$ pour $n \geq n_0$. Par conséquent, si la suite (S_n) a une limite finie, alors (S'_n) aussi, et si (S_n) n'a pas de limite, alors (S'_n) non plus.

En cas de convergence, on a bien sûr

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \ + \sum_{k=0}^{n_0-1} y_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k.$$

En particulier, comme $\sum_{k=0}^{n_0-1} y_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} x_k$ n'est pas forcément nul, les sommes des séries ne sont en général pas égales. □

Définition 2.6. *Lorsque la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ converge, on appelle reste de la série la suite (R_n) définie par*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On notera que la suite (R_n) tend vers 0. En effet, si on pose $\ell = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$, alors, d'après la linéarité des sommes des séries entières,

$$\ell - R_n = \sum_{k=0}^{n} x_k \to \ell \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Donc $R_n \to 0$. □

Le premier critère de convergence, décrit ici, est fondamental. Il repose sur la définition suivante :

Définition 2.7. *On dit que la série de terme général x_n est* ***absolument convergente*** *lorsque la série de terme général $|x_n|$ converge.*

Théorème 2.8. *Une série absolument convergente est convergente. Autrement dit, si la série de terme général $|x_n|$ converge, alors la série de terme général x_n converge aussi.*

Remarque. *Attention ! La réciproque est fausse en général... Nous verrons par exemple que la série de terme général $(-1)^n/n$ est convergente, mais pas absolument convergente.*

Démonstration. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série de terme général x_n et (Σ_n) celle de terme général $|x_n|$. Comme la série de terme général $|x_n|$ converge, la suite (Σ_n) est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ |\Sigma_{n+p} - \Sigma_n| \leq \varepsilon\ . \tag{2.1}$$

Notons que

$$\Sigma_{n+p} - \Sigma_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k| \qquad \text{et que} \qquad S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k$$

Comme $\mathbb{R}$ est complet, pour montrer la convergence de la série de terme général x_n (i.e., que la suite (S_n) a une limite finie), il suffit de montrer que la suite (S_n) est de Cauchy. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons n_0 comme dans (2.1). On a alors, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq 0$,

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k| = \Sigma_{n+p} - \Sigma_n \leq \varepsilon\ ,$$

où la seconde inégalité vient de l'inégalité triangulaire, et la dernière de (2.1). Par conséquent nous avons montré que la suite (S_n) est de Cauchy, ce qui implique qu'elle converge dans $\mathbb{R}$, et donc que la série de terme général x_n converge. □

Le théorème précédent explique l'importance des séries à terme général positif, dont l'étude fait l'objet du paragraphe suivant. En effet, pour une série dont le terme général x_n change de signe, on étudie d'abord la série de terme général $|x_n|$: si cette série converge, alors on est assuré de la convergence de la série de terme général x_n converge. *Bien noter cependant que, si la série de terme général $|x_n|$ diverge, on ne sait rien sur la série initiale.*

2.2 Séries à terme général positif

Commençons d'abord par une remarque évidente, mais fondamentale.

Proposition 2.9. *Si le terme général de la série est positif, alors la suite des sommes partielles est positive et croissante. En particulier, il n'y a que deux cas possibles :*

- *Cas 1 : la suite (S_n) est majorée. Dans ce cas, (S_n) est une suite croissante et majorée et donc admet une limite finie : la série converge.*
- *Cas 2 : la suite (S_n) n'est pas majorée. Dans ce cas, elle tend vers $+\infty$, et la série diverge.*

Démonstration. Supposons que $x_n \geq 0$ pour tout n. Alors $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$ est une somme de réels positifs, et est donc positif. De plus,

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0 \qquad \forall n \geq 0$$

La suite (S_n) est donc croissante. $\square$

Un exemple fondamental est le suivant. Il jouera un rôle particulier par la suite.

Exemple. Séries de terme général $1/n^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$. *La convergence de la série de terme général $1/n^\alpha$ dépend du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, ainsi que décrit dans la proposition suivante.*

Proposition 2.10. *La série de terme général $1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration.
1. Notons pour commencer que si $\alpha \leq 0$, alors la suite $(1/n^\alpha)$ ne tend pas vers 0, et donc que la série ne converge pas.

Pour traiter le cas $\alpha > 0$, nous comparons les sommes partielles de la série avec une intégrale que l'on sait calculer.
2. Supposons que $\alpha > 1$. Pour montrer que la série converge, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles (S_n) est majorée. Notons que, comme la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ est décroissante, on a

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \qquad \forall x \in [k-1, k],\ \forall k \geq 2\ .$$

Pour $k \geq 2$, intégrons l'inégalité ci-dessus entre $k-1$ et k (intervalle de longueur 1) :

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Sommons l'inégalité ainsi obtenue pour k allant de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 2$, on a (en n'oubliant pas que $1-\alpha < 0$) :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = 1 + \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Donc la suite (S_n) est majorée, ce qui montre que la série de terme général $1/n^\alpha$ converge.
3. On suppose maintenant que $\alpha = 1$. Nous allons montrer que la suite des sommes partielles (S_n) de la série de terme général $1/n$ tend vers $+\infty$. Pour cela, nous cherchons à minorer S_n. Comme la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante, on a

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \qquad \forall x \in [k, k+1],\ \forall k \geq 1\ .$$

Pour $k \geq 1$, on intègre l'inégalité ci-dessus entre k et $k+1$ (intervalle de longueur 1) :

$$\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}\ ,$$

puis on somme l'inégalité ainsi obtenue pour k allant de 1 à n :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1).$$

Comme la suite $(\ln(n+1))$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, la suite (S_n) aussi. Donc la série de terme général $1/n$ diverge.

4. Pour finir, considérons le cas $\alpha \in]0,1[$. On fait exactement les mêmes calculs que dans le cas $\alpha = 1$, en remplaçant la fonction $x \mapsto 1/x$ par la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$, pour obtenir l'inégalité

$$S_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \to +\infty \text{ quand } n \to +\infty \ .$$

□

Voici les critères simples de convergence qui doivent être connus, et qui sont développés dans la suite :

- critère de comparaison pour les séries à termes positifs,
- critère d'équivalence pour les séries à termes positifs,
- critères de Cauchy et de D'Alembert,
- critère en n^α.

Proposition 2.11 (Critère de comparaison pour les séries à termes positifs)**.** *Soient deux séries de terme général positif (x_n) et (y_n). On suppose qu'il existe un rang n_0 tel que*

$$\forall n \geq n_0, \qquad x_n \leq y_n \ .$$

Alors :

- *si la série de terme général y_n converge, alors la série de terme général x_n converge aussi.*
- *si la série de terme général x_n diverge, alors la série de terme général y_n diverge aussi.*

Remarque. *Attention : ce critère n'est valable que pour les séries à terme général positif. Voici un contre-exemple lorsque le terme général de la série change de signe : on pose $x_n = -1$ et $y_n = 0$. Alors $x_n \leq y_n$, la série de terme général y_n converge, mais la série de terme général x_n diverge.*

Exemple. En pratique, on se sert du critère de la façon suivante : étant donnée une série de terme général positif x_n, on cherche une série de terme général positif y_n "simple" telle que y_n majore (ou minore) x_n pour tout n. Par exemple, si $x_n = |\sin(n)|/2^n$, on note que $0 \leq x_n \leq (1/2)^n$. Comme la série de terme général $y_n = (1/2)^n$ converge, on déduit du critère de comparaison que la série de terme général x_n converge aussi.

Démonstration du critère de comparaison pour les séries à termes positifs. Du fait de la Proposition 2.5 on peut supposer sans perte de généralité que $n_0 = 0$. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de (x_n) et (Σ_n) celle de (y_n). Par hypothèse $x_n \leq y_n$ pour tout n, et donc on a $S_n \leq \Sigma_n$ pour tout n.

Supposons d'abord que la série de terme général y_n converge. Alors on a

$$S_n \leq \Sigma_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} y_k \qquad \forall n \geq 0 \ .$$

Donc la suite (S_n) qui est croissante, est également bornée. Par conséquent elle possède une limite réelle, ce qui prouve la série de terme général x_n converge.

Supposons maintenant que la série de terme général x_n diverge. Alors on a

$$S_n \leq \Sigma_n$$

avec $S_n \to +\infty$. Donc $\Sigma_n \to +\infty$, ce qui prouve que la série de terme général y_n diverge. □

Définition 2.12. *Rappelons que deux suites* (x_n) *et* (y_n) *sont équivalentes si* x_n *et* y_n *ne s'annulent pas pour tout* n *assez grand et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = 1.$$

On note $x_n \sim y_n$ *(quoique ce soit une propriété de la suite entière et non de son* n*-ième terme).*

On rappelle que cette notion définit une relation d'équivalence sur les suites qui sont non nulles à partir d'un certain rang, i.e.,

- $x_n \sim x_n$ (*Réflexivité*)
- si $x_n \sim y_n$, alors $y_n \sim x_n$ (*Symétrie*)
- si $x_n \sim y_n$ et $y_n \sim z_n$, alors $x_n \sim z_n$ (*Transitivité*)

Rappelons enfin que le calcul d'un équivalent simple d'une suite donnée passe le plus souvent par l'utilisation des développements limités (cf. l'appendice pour des rappels sur les équivalents et les développements limités en Section 8.2).

Proposition 2.13 (Critère d'équivalence pour les séries à termes positifs)**.** *Soient deux séries de terme général positif* x_n *et* y_n*. On suppose que les suites* (x_n) *et* (y_n) *sont équivalentes. Alors la série de terme général* x_n *converge si et seulement si la série de terme général* y_n *converge.*

Proposition 2.14 (Critère de Cauchy)**.** *On considère une série de terme général* x_n *strictement positif. Si la suite* $((x_n)^{\frac{1}{n}})$ *possède une limite* $0 \leq \ell \leq \infty$*, alors :*

- *si* $\ell < 1$*, la série de terme général* x_n *converge,*
- *si* $\ell > 1$*, la série de terme général* x_n *diverge.*

Proposition 2.15 (Critère de D'Alembert)**.** *On considère une série de terme général* x_n *strictement positif. Si la suite* (x_{n+1}/x_n) *possède une limite* $0 \leq \ell \leq \infty$*, alors :*

- *si* $\ell < 1$*, la série de terme général* x_n *converge,*
- *si* $\ell > 1$*, la série de terme général* x_n *diverge.*

Remarque. *Et si* $\ell = 1$ *? Dans ce cas, on ne sait pas conclure (que ce soit pour le critère de Cauchy ou celui de D'Alembert), sauf à ajouter d'autres hypothèses...*

Proposition 2.16 (Critère en n^α)**.** *On considère une série de terme général* x_n *positif. Alors :*

- *s'il existe un réel* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $n^\alpha x_n$ *possède une limite réelle finie, alors la série de terme général* x_n *converge,*
- *s'il existe un réel* $\alpha \leq 1$ *tel que la suite* $n^\alpha x_n$ *tend vers* $+\infty$*, alors la série de terme général* x_n *diverge.*

Remarque. *Les critères d'équivalence, de Cauchy et de D'Alembert ne sont valables que pour des séries à terme général positif (fabriquer un contre-exemple dans le cas du critère d'équivalence !). Il est facile de comprendre que le critère en* n^α*, lui, s'applique également aux séries dont le terme général change de signe.*

Exemple. On se sert en pratique de ces critères de la façon suivante :

• on utilise le critère d'équivalence lorsque l'on dispose d'équivalents simples des expressions composant le terme général de la série. Par exemple, si $x_n = \sin(1/n)/(1+n)$ alors $\sin(1/n) \sim 1/n$ tandis que $1 + n \sim n$. Donc $x_n \sim (1/n)/n = 1/n^2$ où $y_n = 1/n^2$ est le terme général d'une série convergente. On n'omettra pas, bien entendu, de justifier la positivité du terme général ! Ici, on remarque que l'on a toujours $\sin(1/n) \geq 0$, car pour n dans $\mathbb{N}^*$ on a $1/n \in]0, 1] \subset [0, \pi]$...

• on utilise le critère de Cauchy lorsque l'expression composant le terme général x_n fait apparaître des puissances $n-$ièmes : par exemple, $x_n = (n/(1 + 2n))^n$. Alors $x_n^{1/n} = n/(1 + 2n)$, qui tend vers $1/2 < 1$ lorsque $n \to +\infty$.

• on utilise le critère de D'Alembert lorsque le calcul du rapport x_{n+1}/x_n est particulièrement simple : par exemple, $x_n = 2^n/n!$. Alors $x_{n+1}/x_n = 2/(n+1)$ qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, ce qui prouve que la série converge.

• enfin, on utilise le critère en n^α lorsque l'expression $n^\alpha x_n$ met en jeu des puissances comparées : par exemple, si $x_n = \ln(n)/n^2$, alors en choisissant $\alpha = 3/2 > 1$, on a $x_n n^\alpha = \ln(n)/n^{1/2}$. Par puissances comparées, cette suite tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Donc la série converge.

La démonstration de ces assertions se fait toujours de la même façon : on montre que la suite (a_n) peut être comparée à une suite simple dont on connaît le comportement de la série associée. À titre d'exemple nous donnons une démonstration du critère de Cauchy.

Démonstration de la Proposition 2.14. Supposons d'abord que $(x_n)^{\frac{1}{n}} \to \ell$ avec $\ell < 1$. Alors il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \qquad \left|(x_n)^{\frac{1}{n}} - \ell\right| \leq (1-\ell)/2.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq n_0$,

$$(x_n)^{\frac{1}{n}} \leq (1+\ell)/2\ ,$$

et donc que

$$x_n \leq ((1+\ell)/2)^n\,.$$

Comme $\ell < 1$, $(1+\ell)/2 < 1$, et donc la série de terme général $((1+\ell)/2)^n$ converge. On déduit du critère de comparaison que la série à terme général positif x_n converge aussi.

Si l'on suppose maintenant que $\ell > 1$, alors il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \qquad (x_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1$$

et donc que

$$x_n \geq 1\ .$$

Alors (x_n) ne tend pas vers 0 et la série diverge. □

2.3 Series semi-convergentes

Nous revenons maintenant au cas des séries dont le terme général x_n peut changer de signe. Dans ce cas, nous avons vu au début du cours que si la série de terme général x_n est absolument convergente, alors elle est convergente. Nous allons nous intéresser aux séries convergentes, mais pas absolument convergentes :

Définition 2.17. *On dit qu'une série est* ***semi-convergente*** *si elle est convergente, mais pas absolument convergente.*

Un exemple typique de ce type de situation est donné dans le cadre des **séries alternées**, telles que décrites dans l'énoncé suivant.

Théorème 2.18 (Critère spécial des séries alternées)**.** *Soit (x_n) une suite à termes positifs,* ***décroissante*** *et* ***convergeant vers*** 0. *Alors la série de terme général $(-1)^n x_n$ est convergente.*

Remarque. *On peut remarquer que la positivité des termes de la suite (x_n) se déduit du fait que cette suite soit décroissante et tende vers 0 (Exercice !). Le fait que (x_n) tende vers 0 est bien entendu nécessaire. Et on peut trouver facilement des contre-exemples sans l'hypothèse de décroissance (prenons (x_n) tel que $x_{2n} = 1/n$ et $x_{2n+1} = 0$...)*

Exemple. *Si* $\alpha > 0$ *et* $x_n = 1/n^\alpha$*, alors le critère s'applique et la série de terme général* $(-1)^n/n^\alpha$ *converge. Mais si* $\alpha \leq 1$*, la série n'est pas absolument convergente.*

Ce résultat peut être généralisé de la manière suivante, selon le **critère d'Abel** décrit dans le résultat suivant.

Théorème 2.19 (Critère d'Abel)**.** *Soit* (x_n) *une suite dont le terme général peut se mettre sous la forme* $x_n = a_n b_n$*, où :*

(i) (a_n) *est une suite décroissante tendant vers* 0*,*

(ii) la suite des sommes partielles $(B_n = \sum_{k=0}^n b_k)$ *de* (b_n) *est bornée.*

Alors la série de terme général x_n *est convergente.*

Exemple. *Posons* $b_n = (-1)^n$*, et soit* (a_n) *une suite décroissante et tendant vers* 0*. Comme*

$$B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

la suite (B_n) *des sommes partielles de* (b_n) *est bornée. Le critère d'Abel dit alors que la série de terme général* x_n *est convergente, et le Théorème 2.18 se déduit donc du Théorème 2.19. Il existe cependant des démonstrations plus simples dans le cas particulier du Théorème 2.18 !*

Exemple. *Le critère d'Abel s'applique également aux séries dont le terme général est de la forme* $x_n = a_n b_n$*, où* (a_n) *tend vers* 0 *en décroissant et* (b_n) *est soit la suite* $\sin(\theta n)$*, soit la suite* $\cos(\theta n)$*, avec* $\theta \neq 0$ *mod.* 2π*.*

Dans le cas où b_n *est de la forme* $\sin(\theta n)$ *ou* $\cos(\theta n)$*, il est utile de passer en complexes pour calculer* B_n*. Si* $b_n = \sin(\theta n)$*, on a en effet :*

$$B_n = \sum_{k=0}^n \sin(\theta k) = \sum_{k=0}^n \mathrm{Im}\left(e^{i\theta k}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^n e^{i\theta k}\right),$$

où $\mathrm{Im}(z)$ *désigne la partie imaginaire d'un nombre complexe* z*. Or dès que* $\theta \neq 0$ *mod.* 2π*, on a*

$$\sum_{k=0}^n e^{i\theta k} = \frac{e^{i\theta(n+1)} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\theta(n+1)/2}(e^{i\theta(n+1)/2} - e^{-i\theta(n+1)/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} = e^{i\theta n/2}\,\frac{\sin(\theta(n+1)/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

Donc

$$B_n = \sin(\theta n/2)\,\frac{\sin(\theta(n+1)/2)}{\sin(\theta/2)}$$

qui est borné : $|B_n| \leq 1/|\sin(\theta/2)|$ *pour tout* n*.*

Le cas où $b_n = \cos(\theta n)$ *se traite de même :*

$$B_n = \sum_{k=0}^n \cos(\theta k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{i\theta k}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta n/2}\,\frac{\sin(\theta(n+1)/2)}{\sin(\theta/2)}\right) = \cos(\theta n/2)\,\frac{\sin(\theta(n+1)/2)}{\sin(\theta/2)},$$

où $\mathrm{Re}(z)$ *désigne la partie réelle d'un nombre complexe* z*. Donc la suite* (B_n) *est bornée :* $|B_n| \leq 1/|\sin(\theta/2)|$ *pour tout* n*.*

Démonstration du critère d'Abel. On utilise la **transformation d'Abel**, qui consiste juste à remarquer que $b_n = B_n - B_{n-1}$ pour $n \geq 0$ (on a posé $B_{-1} = 0$) et à faire la transformation suivante.

On a

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n} a_k B_{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=-1}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k \\
&= a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k .
\end{aligned}$$

Pour passer de la deuxième ligne à la troisième, on a fait un *changement d'indice* dans la deuxième somme, où le "nouveau k" correspond à "l'ancien k moins 1". Pour passer de la troisième ligne à la quatrième, on s'est rappelé que $B_{-1} = 0$. Enfin, pour la dernière égalité, on a séparé dans la première somme les indices k entre 0 et $n-1$ et l'indice $k = n$.

Notons que le suite $(a_n B_n)$ tend vers 0 puisque (a_n) tend vers 0 et (B_n) est bornée. Pour montrer que la série de terme général x_n converge, on est donc ramené à l'étude de la convergence de la série de terme général $y_n = (a_n - a_{n+1})B_n$. Nous allons prouver que cette série est absolument convergente. Soit M un majorant de la suite (B_n). Comme la suite (a_n) est décroissante, on a

$$|y_n| = (a_n - a_{n+1})|B_n| \leq M(a_n - a_{n+1}) .$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} |y_k| \leq M \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1}) = M(a_0 - a_{n+1}),$$

où le membre de droite est borné puisqu'il tend vers Ma_0 lorsque $n \to +\infty$ (on se sert à nouveau ici du fait que (a_n) tend vers 0). On en déduit que la série de terme général y_n est absolument convergente, ce qui conclut la démonstration. □

Remarque. *On peut regarder la transformation d'Abel comme une version « discrète » (c'est-à-dire adaptée aux séries plutôt qu'aux intégrales) de l'intégration par parties...*

2.4 Quelques exercices

Ce qu'il faut absolument connaître pour faire les exercices :

- les développements limités des fonctions usuelles, comment on les manipule et comment on calcule des équivalents simples de suites numériques,
- les principaux résultats théoriques du cours : la définition de la convergence d'une série, le fait que la convergence absolue entraîne la convergence, que la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs soit converge, soit tend vers $+\infty$,
- les conditions de convergence d'une série de terme général $1/n^\alpha$ et a^n,
- les critères de convergence des séries à termes positifs et comment on s'en sert,
- le critère spécial des séries alternées et le critère d'Abel pour les séries pour lesquelles il ne semble pas évident de montrer la convergence absolue.

Exercice 2.1. Déterminer si la série de terme général x_n converge ou diverge :

$$(i)\ x_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad (ii)\ x_n = \frac{\ln(n)}{n^2} \qquad (iii)\ x_n = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}$$
$$(iv)\ x_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} \qquad (v)\ x_n = \frac{n^n}{n!} \qquad (vi)\ x_n = \frac{a^n}{n!} \qquad (a > 0)$$

Exercice 2.2. Déterminer si la série de terme général x_n converge ou diverge :

$$(i)\ x_n = \frac{\cos(2n)}{n} \qquad (ii)\ x_n = \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!}$$

Chapitre 3

Intégrales généralisées

Introduction. En première année a été introduite l'intégrale définie, i.e., l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné. On trouvera quelques rappels utiles sur l'intégrale définie en appendice. L'intégrale généralisée, qui fait l'objet de ce chapitre, est une intégrale dans laquelle soit l'intervalle d'intégration n'est pas borné, soit la fonction n'est pas continue sur l'intervalle fermé d'intégration.

3.1 Intégrale généralisée sur un intervalle non borné

Nous abordons l'étude des intégrales généralisées par des intégrales de la forme $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, où $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est **continue sur l'intervalle fermé** $[a, +\infty[$.

Définition 3.1. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$* **converge** *si la limite lorsque $X \to +\infty$ de l'expression $\int_a^X f(x)\,dx$ existe et est un nombre réel. Dans ce cas, on note*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)\,dx.$$

Lorsque l'expression $\int_a^X f(x)\,dx$ n'a pas de limite finie lorsque $X \to +\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **diverge**.

Vocabulaire. On parle dans ce cas d'**intégrale généralisée** ou d'**intégrale impropre**.

Exemple. ***Étude de l'intégrale*** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$*. Cet exemple fondamental est traité dans la proposition suivante.*

Proposition 3.2. *L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\alpha \neq 1$. Pour tout $X > 1$, on a

$$\int_1^X \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^X = \frac{X^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}\ .$$

Cette dernière expression n'a une limite finie lorsque $X \to +\infty$ que si $\alpha > 1$. Dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}\ .$$

Si $\alpha = 1$, alors
$$\int_1^X \frac{1}{x}\,dx = [\log(x)]_1^X = \log(X)\ ,$$
qui tend vers $+\infty$ lorsque $X \to +\infty$. □

Remarque. *Pour $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $]-\infty, b]$, on définit de même l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$: celle-ci converge si la limite lorsque $X \to -\infty$ de l'expression $\int_X^b f(x)\,dx$ existe et est un nombre réel, et diverge sinon.*

Dans la suite de la Section 3.1, on donne les énoncés pour des intégrales généralisées de la forme $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Tous les énoncés restent valables bien entendu pour des intégrales généralisées de la forme $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$, mutatis mutandis. Bien sûr, les énoncés réclamant des fonctions positives continuent à le demander quand on change de côté !

Proposition 3.3 (Linéarité)**.** *Soit $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergent et si λ et μ sont deux nombres réels, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty}(\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx$ converge et vaut*
$$\int_a^{+\infty}(\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda\int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \mu\int_a^{+\infty} g(x)\,dx\ .$$

Démonstration. La preuve est un simple passage à la limite, partant de
$$\int_a^X(\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda\int_a^X f(x)\,dx + \mu\int_a^X g(x)\,dx\ .$$
□

Comme pour les séries, la question principale pour les intégrales généralisées est celle de la convergence : le calcul explicite de l'intégrale généralisée est au demeurant parfois impossible.

La proposition suivante exprime le fait que la convergence d'une intégrale généralisée ne dépend que du comportement à l'infini de la fonction.

Proposition 3.4. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $b \geq a$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Dans ce cas,*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx \tag{3.1}$$

Démonstration. Pour tout $X > b$, on a l'égalité suivante, qui n'est autre que la relation de Chasles :

$$\int_a^X f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^X f(x)\,dx. \tag{3.2}$$

Par conséquent, les expressions $\int_a^X f(x)\,dx$ et $\int_b^X f(x)\,dx$, qui ne diffèrent que de la constante $\int_a^b f(x)\,dx$, ont même comportement (convergence ou divergence) lorsque $X \to +\infty$. En passant à la limite dans (3.2), on trouve l'égalité (3.1). □

De même que pour la notion de reste pour les séries il est parfois utile, lorsque l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge, d'introduire la notion de *reste de l'intégrale généralisée* :

$$R(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt \qquad \forall x \in [0, +\infty[\ .$$

Il est aisé de voir que $\lim_{x\to+\infty} R(x) = 0$.

Définition 3.5. *On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge.*

Théorème 3.6. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale généralisée est absolument convergente, alors l'intégrale généralisée est convergente.*

Démonstration. Rappelons que pour montrer que la limite de $\int_a^X f(x)\,dx$ lorsque $X \to +\infty$ existe, il suffit de montrer que, quelle que soit la suite (X_n) tendant vers $+\infty$, la suite $(\int_a^{X_n} f(x)\,dx)$ possède une limite (réelle).

Fixons donc une suite (X_n) tendant vers $+\infty$ et montrons que la limite de $\int_a^{X_n} f(x)\,dx$ lorsque $n \to +\infty$ existe. Pour prouver cela, on remarque d'abord que, comme l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge, la suite $z_n = \int_a^{X_n} |f(x)|\,dx$ converge, et donc est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0,\ \forall p \geq 0,\ |z_{n+p} - z_n| \leq \varepsilon \tag{3.3}$$

avec

$$z_{n+p} - z_n = \int_a^{X_{n+p}} |f(x)|\,dx - \int_a^{X_n} |f(x)|\,dx = \int_{X_n}^{X_{n+p}} |f(x)|\,dx\ .$$

Montrons maintenant que la suite de terme général $s_n = \int_a^{X_n} f(x)\,dx$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ fixé et n_0 défini par (3.3). Alors, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq 0$, on a

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|\int_{X_n}^{X_{n+p}} f(x)\,dx\right| \leq \left|\int_{X_n}^{X_{n+p}} |f(x)|\,dx\right| = |z_{n+p} - z_n| \leq \varepsilon$$

grâce à l'inégalité triangulaire et (3.3). Donc (s_n) est de Cauchy, ce qui prouve que la suite $(\int_a^{X_n} f(x)\,dx)$ a une limite finie. □

Remarque. *Contrairement au cas des suites, il n'est pas nécessaire que la fonction f tende vers* 0 *pour que l'intégrale converge.*

Au vu du théorème sur la convergence absolue, il suffit souvent d'étudier la convergence des intégrales de fonctions positives. C'est ce à quoi on s'attèle maintenant, en commençant par cette remarque qui est l'équivalent pour les intégrales généralisées de la Proposition 2.9.

Remarque. *Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Comme la fonction $F(X) = \int_a^X f(x)\,dx$ est croissante, on en déduit qu'il n'y a que deux cas possibles pour son comportement en $+\infty$:*

- *soit F est bornée. Alors la limite de $F(X)$ quand $X \to +\infty$ existe et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.*
- *soit $\lim_{X\to+\infty} F(X) = +\infty$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.*

Cette remarque centrale conduit aux critères de convergence suivants (comparer avec les critères pour les suites).

Proposition 3.7 (Critère de comparaison)**.** *Soient* $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, positives sur* $[a, +\infty[$*. On suppose qu'il existe* $b \geq a$ *tel que*

$$\forall x \geq b, \qquad f(x) \leq g(x) \ .$$

Alors

- *si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *converge, alors l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *converge aussi,*
- *si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *diverge, alors l'intégrale* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *diverge aussi.*

Proposition 3.8 (Critère d'équivalence)**.** *Soient* $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, positives sur* $[a, +\infty[$*. On suppose que les fonctions* f *et* g *sont équivalentes en* $+\infty$*. Alors* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *converge si et seulement si* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *converge.*

Proposition 3.9 (Critère en x^α)**.** *On considère une fonction* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *fonction continue, positive sur* $[a, +\infty[$*. Alors :*

- *s'il existe un réel* $\alpha > 1$ *tel que l'expression* $x^\alpha f(x)$ *possède une limite réelle finie lorsque* $x \to +\infty$*, alors* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *converge,*
- *s'il existe un réel* $\alpha \leq 1$ *tel que l'expression* $x^\alpha f(x)$ *tende vers* $+\infty$ *lorsque* $x \to +\infty$*, alors* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *diverge.*

Remarque. *Dans le cas d'intégrales généralisées en* $-\infty$*, on prendra soin de considérer* $|x|^\alpha$ *plutôt que* x^α*, car pour* α *réel,* x^α *n'est en général défini que pour* $x > 0$ *!*

La preuve de la Proposition 3.7 est calquée sur celle de la Proposition 2.11 dans le cas des séries. Les autres démonstrations reposent sur une application directe de cette proposition.

3.2 Intégrale généralisée sur un intervalle borné

On s'intéresse ici à l'intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\, dx$, où $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle $]a, b]$, mais pas sur l'intervalle $[a, b]$. L'intégrale n'est donc plus définie au sens classique.

Définition 3.10. *Soit* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On dit que l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(x)\, dx$ *converge si la limite lorsque* $X \to a^+$ *de* $\int_X^b f(x)\, dx$ *existe. On note alors*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{X \to a^+} \int_X^b f(x)\, dx$$

Exemple. *Un Exemple fondamental est donné dans l'énoncé suivant.*

Proposition 3.11. *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\alpha \neq 1$. Pour tout $X > 0$, on a

$$\int_X^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_X^1 = \frac{1 - X^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ .$$

Cette dernière expression n'a une limite finie, lorsque $X \to 0$, que si $\alpha < 1$. Dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{1-\alpha} \ .$$

Si $\alpha = 1$, alors

$$\int_X^1 \frac{1}{x}\, dx = [\log(x)]_X^1 = -\log(X) \ ,$$

qui tend vers $+\infty$ lorsque $X \to 0$. □

Remarque. *Pour* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue, on définit de même l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(x)\,dx$ *comme la limite lorsque* $X \to b^-$ *de* $\int_a^X f(x)\,dx$*, lorsqu'elle existe. On pourra adapter les énoncés qui suivent au cas d'une intégrale généralisée "à droite".*

Proposition 3.12. *Soit* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si* $c \in]a, b]$*, alors l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge si et seulement si l'intégrale généralisée* $\int_a^c f(x)\,dx$ *converge. Dans ce cas,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ .$$

Définition 3.13. *On dit que l'intégrale généralisée* $\int_a^b f(x)\,dx$ *est absolument convergente si* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *converge.*

Théorème 3.14. *Soit* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si l'intégrale généralisée est absolument convergente, alors elle est convergente.*

On peut donc souvent se ramener à l'intégrale de fonctions positives. Les critères sont alors très proches de ceux déjà rencontrés.

Proposition 3.15 (Critère de comparaison)**.** *Soient* $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, positives sur* $]a, b]$*. On suppose que*

$$\forall x \in]a, b], \qquad f(x) \le g(x)\ .$$

Alors

- *si l'intégrale* $\int_a^b g(x)\,dx$ *converge, alors l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge aussi,*
- *si l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge, alors l'intégrale* $\int_a^b g(x)\,dx$ *diverge aussi.*

Proposition 3.16 (Critère d'équivalence)**.** *Soient* $f, g :]a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, positives sur* $]a, b]$*. On suppose que les fonctions* f *et* g *sont équivalentes en* a^+*. Alors* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge si et seulement si* $\int_a^b g(x)\,dx$ *converge.*

Proposition 3.17 (Critère en $(x-a)^\alpha$)**.** *On considère une fonction* $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *fonction continue, positive sur* $]a, b]$*. Alors*

- *s'il existe un réel* $\alpha < 1$ *tel que l'expression* $(x - a)^\alpha f(x)$ *possède une limite réelle finie lorsque* $x \to a^+$*, alors* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge,*
- *s'il existe un réel* $\alpha \ge 1$ *tel que l'expression* $(x - a)^\alpha f(x)$ *tende vers* $+\infty$ *lorsque* $x \to a^+$*, alors* $\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge.*

Remarque. *En cas d'intégrale généralisée à droite, considérer* $(b - x)^\alpha f(x)$*.*

3.3 Intégrale doublement généralisée

On appelle intégrale doublement généralisée une intégrale de la forme $\int_a^b f(x)\,dx$, où f est continue sur $]a, b[$, avec $a = -\infty$ ou f non continue en a, et $b = +\infty$ ou f non continue en b.

Par exemple, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ est une intégrale doublement généralisée.

L'analyse de ces intégrales se ramène à l'analyse de deux intégrales généralisées.

Définition 3.18. *Soit $]a,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une application continue sur $]a,b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ converge s'il existe $c \in]a,b[$tel que les intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ convergent. Dans ce cas, elles convergent en fait quel que soit le choix de c dans $]a,b[$. Par définition, le réel $\int_a^b f(x)\,dx$ est alors donné par*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

le résultat ne dépendant pas du choix de c.
Si l'une des intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ ou $\int_c^b f(x)\,dx$ diverge, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Exemple. *Par exemple, pour analyser l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, il faut étudier les intégrales $\int_{-1}^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ pour un réel $c \in]-1,1[$ que l'on peut choisir (ici $c = 0$ convient parfaitement). On note que les intégrales $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ convergent toutes les deux, et on peut donc dire que l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ converge.*

Exemple. *Voici un autre exemple : pour étudier l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, on "doit" étudier la convergence des intégrales $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. La première est convergente, mais pas la seconde. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ diverge donc.*

Remarque. *On fera bien attention que la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ n'est pas équivalente au fait que $\int_{-X}^X f(x)\,dx$ ait une limite lorsque $X \to +\infty$. Par exemple $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ est clairement divergente selon la définition ci-dessus, alors que pour tout X réel, $\int_{-X}^X x\,dx = 0$, donc la limite de $\int_{-X}^X x\,dx$ est trivialement définie lorsque $X \to +\infty$!*

3.4 Calcul intégral

Règle principale. Le calcul sur les intégrales généralisées se fait toujours en partant de la définition : on fait des calculs sur une intégrale **définie**, puis on passe à la limite.

Exemple. *Par exemple calculons l'intégrale*

$$I = \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx.$$

On montre facilement que cette intégrale converge (critère en x^α par exemple). Posons $I(X) = \int_0^X xe^{-x}\,dx$. Alors I sera défini comme la limite de $I(X)$ lorsque $X \to +\infty$ si elle existe. Pour X fixé, on a (en utilisant une intégration par parties) :

$$\begin{aligned} I(X) &= [x(-e^{-x})]_0^X - \int_0^X (-e^{-x})\,dx \\ &= -Xe^{-X} - [e^{-x}]_0^X \\ &= -Xe^{-X} - (e^{-X} - 1). \end{aligned}$$

La limite de $I(X)$ lorsque $X \to +\infty$ est donc bien définie et on a :

$$I = \lim_{X \to +\infty} I(X) = 1\ .$$

Le lecteur trouvera en appendice des règles de calcul classiques sur l'intégrale définie : intégration par parties, changement de variables.

3.5 Quelques exercices

Ce qu'il faut absolument connaître pour faire les exercices :

- Comment on manipule l'intégrale définie, et ses règles de calcul,
- les développements limités des fonctions usuelles, comment on les manipule et comment on calcule des équivalents simples de fonctions en $+\infty$ et en un point,
- les principaux résultats théoriques du cours : la définition de la convergence d'une intégrale généralisée et doublement généralisée, le fait que la convergence absolue entraîne la convergence,
- la nature des intégrales généralisées classiques :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}\ ,$$

- les critères de convergence des intégrales généralisées et comment on s'en sert.

Exercice 3.1. Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$i)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx \qquad ii)\ \int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^\alpha})\,dx\ \ (\text{où } \alpha > 0) \qquad iii)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^x+1}{e^{2x}+3}\,dx$$

$$iv)\ \int_{4/\pi}^{+\infty} \sin^2(x)(1-\cos(1/x))\,dx \qquad v)\ \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,dx \qquad vi)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Exercice 3.2. i) Montrer que l'intégrale

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}dt$$

converge pour tout $a > 0$.

ii) En effectuant une intégration par parties, montrer que

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

iii) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n.

Chapitre 4

Suites et séries de fonctions

Introduction. Dans cette partie, on s'intéresse à des suites et séries de fonctions. Une différence majeure avec l'étude des suites et séries numériques est que la notion de convergence pour les suites et séries de fonctions n'est pas univoque : il existe plusieurs notions qui ne sont pas équivalentes entre elles.

4.1 Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

Dans toute la suite, I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 4.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite de fonction (f_n)* **converge simplement** *vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur l'intervalle I si pour tout $x \in I$ fixé, la suite de réels $(f_n(x))$ converge vers le réel $f(x)$. Autrement dit,*

$$\forall x \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ .$$

Malheureusement, cette notion de convergence, qui est la plus naturelle que l'on puisse imaginer, n'a pas de bonnes propriétés. Par exemple, même si les fonctions (f_n) sont continues, la limite f ne l'est pas forcément. De plus, si $I = [a, b]$, la suite d'intégrales $\int_a^b f_n(x)\,dx$ peut ne pas converger vers $\int_a^b f(x)\,dx$. On introduit donc une notion plus forte de convergence, qui a de meilleures propriétés.

Définition 4.2. *On dit qu'une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$* **converge uniformément** *vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur l'intervalle I si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\ .$$

Remarque. Dans la convergence simple, l'indice n_0 dépend de ε et de x, tandis que dans la convergence uniforme, n_0 ne dépend que de ε. En particulier, la notion de convergence uniforme est plus exigente que celle de convergence simple. Par conséquent :

Proposition 4.3. *Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors (f_n) converge simplement vers f sur I.*

Il existe cependant des suites de fonctions qui convergent simplement, mais pas uniformément :

Exercice 4.1. Montrer que la suite de fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x^n \qquad \forall x \in [0, 1]$$

converge simplement, mais pas uniformément, vers une fonction f que l'on déterminera.

Une autre façon de formuler la convergence uniforme est la suivante :

Proposition 4.4. *La suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* I *si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \;=\; 0$$

En pratique, s'il est souvent délicat de calculer explicitement la quantité $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$, il est souvent possible de la **majorer** par une expression simple. Afin de prouver la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers une fonction f, il suffit alors de trouver une suite réelle (ε_n), qui tend vers 0, et telle que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$ pour tout $x \in I$ et pour tout n.

4.2 Propriétés de la convergence uniforme

On retiendra quatre principales propriétés de la convergence uniforme :

- une limite uniforme de fonctions continues est encore continue,
- si la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur un intervalle I et si la suite de réels (x_n) de I tend vers $x \in I$, alors la suite $(f_n(x_n))$ tend vers $f(x)$,
- l'intégrale sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ de la limite uniforme de fonctions continues est égale à la limite des intégrales de ces fonctions,
- la limite simple de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée converge uniformément est encore de classe $\mathcal{C}^1$.

Voici les énoncés précis de ces assertions.

Théorème 4.5 (Limite uniforme de fonctions continues)**.** *Une limite uniforme de fonctions continues est continue. Autrement dit, si* (f_n) *est une suite de fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}$ *qui converge uniformément vers une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *sur* I*, alors* f *est également continue sur* I*.*

Démonstration. Fixons $x \in I$ et montrons que f est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (f_n) converge uniformément vers f, il existe $n_1 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$\forall y \in I,\; |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{4}\;.$$

De plus, la fonction f_{n_1} étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in I,\; y \in [x - \eta, x + \eta] \;\Rightarrow\; |f_{n_1}(y) - f_{n_1}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\;.$$

Par conséquent, pour tout $y \in I$, avec $y \in [x - \eta, x + \eta]$, on a

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f_{n_1}(y)| + |f_{n_1}(y) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\;,$$

ce qui montre f continue en x, et ce, pour tout $x \in I$. □

Théorème 4.6 (Interversion des limites)**.** *Soit* (f_n) *une suite de fonctions continues de* I *dans* $\mathbb{R}$ *qui converge uniformément vers une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *sur* I*. Soit* (x_n) *une suite d'éléments de* I *qui converge vers un réel* x *appartenant à* I*. Alors la suite numérique* $(f_n(x_n))$ *converge vers* $f(x)$*.*

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) tend uniformément vers f, il existe un rang $n_1 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$\forall y \in I,\; |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\;. \tag{4.1}$$

Comme f est continue (comme limite uniforme de fonctions continues), la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(x)$: il existe donc un rang n_2 tel que, pour tout $n \geq n_2$, on a

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \,. \tag{4.2}$$

Alors, pour tout $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, on a

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,,$$

où la première inégalité vient de l'inégalité triangulaire, et la seconde vient de (4.1) appliquée à $y = x_n$ et de (4.2). Donc $(f_n(x_n))$ tend vers $f(x)$. $\square$

Théorème 4.7 (Convergence uniforme et intégration)**.** *On suppose que la suite de fonctions continues (f_n) de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction (continue) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

On dit qu'on "passe à la limite sous le signe intégral".

Remarque. *Le résultat est faux sans hypothèse supplémentaire pour les intégrales généralisées. On prendra* ***toujours*** *soin de bien justifier les passages à la limite sous le signe intégral.*

Démonstration. Commençons par noter que les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont continues sur le segment $[a,b]$, donc intégrables. De plus la convergence uniforme de la suite (f_n) et la continuité des fonctions f_n impliquent la continuité de f sur $[a,b]$. Donc f est également intégrable sur $[a,b]$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme (f_n) tend uniformément vers f sur $[a,b]$, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall x \in [a,b],\ \forall n \geq n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/(b-a) \,.$$

Il suit que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon \,,$$

ce qui est le résultat escompté. $\square$

Par contre on ne peut pas "passer à la limite sous la dérivée" : même si une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ tend uniformément vers une fonction, la fonction peut ne pas être dérivable. Par exemple :

Exercice 4.2. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ converge uniformément vers $f(x) = |x|$ sur $[-1,1]$. Qu'en est-il de la suite (f_n') ?

Il existe cependant des critères suffisants pour que la fonction limite soit dérivable.

Théorème 4.8 (Convergence uniforme et dérivation)**.** *On suppose que $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si*

1. *il existe un point $a \in I$ tel que la suite réelle $(f_n(a))$ converge vers un réel b,*
2. *la suite de dérivées (f_n') converge uniformément vers une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ sur I,*

alors (f_n) converge simplement sur I vers la fonction f définie par

$$f(x) = b + \int_a^x g(s)ds \qquad \forall x \in I. \tag{4.3}$$

Si de plus l'intervalle I est fermé borné, i.e. $I = [c,d]$, $c \leq a \leq d$, alors (f_n) tend uniformément vers f sur I.

Remarque. *En particulier, g est continue comme limite uniforme de fonctions continues, ce qui permet de définir l'intégrale dans (4.3). On déduit de (4.3) que f est dérivable de dérivée g sur I.*

Démonstration. Soit $x \in I$. Alors, par convergence uniforme de (f_n') vers g sur I, la suite (f_n') converge uniformément vers g sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$). En utilisant le théorème de passage à la limite sous le signe intégral, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) + \lim_{n\to+\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = b + \lim_{n\to+\infty} \int_a^x f_n'(s)ds = b + \int_a^x g(s)ds = f(x) .$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I.

On suppose maintenant que $I = [c, d]$. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n(a))$ tend vers $b = f(a)$, il existe n_1 tel que

$$\forall n \geq n_1, \qquad |f_n(a) - f(a)| \leq \varepsilon/2 .$$

Comme (f_n') tend uniformément vers g, il existe un rang n_2 tel que

$$\forall x \in [c, d],\ \forall n \geq n_2,\ |f_n'(x) - g(x)| \leq \varepsilon/(2(d - c)) .$$

Posons alors $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. On a, pour tout $n \geq n_0$,

$$\begin{array}{rcl} |f_n(x) - f(x)| & = & |f_n(a) - f(a) + \int_a^x (f_n'(s) - g(s))ds| \\ & \leq & |f_n(a) - f(a)| + \left| \int_a^x |f_n'(s) - g(s)|ds \right| \\ & \leq & \frac{\varepsilon}{2} + (d - c)\frac{\varepsilon}{2(d-c)} = \varepsilon . \end{array}$$

D'où la convergence uniforme de (f_n) vers f. □

4.3 Séries de fonctions

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Comme pour les séries numériques, on définit la suite des sommes partielles (S_n) où $S_n : I \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \qquad \forall x \in I .$$

Définition 4.9. *On dit que la série de terme général f_n converge simplement (respectivement uniformément) lorsque la suite des sommes partielles (S_n) converge simplement (resp. uniformément). La limite est notée $\sum_{k=0}^{\infty} f_n$.*

Introduisons à présent le principal critère de convergence pour une série de fonctions de terme général f_n. Ce critère repose sur la définition suivante.

Définition 4.10. *Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On pose $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$. On dit la série de terme général (f_n) **converge normalement** lorsque la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge.*

L'intérêt de la notion vient du résultat suivant.

Théorème 4.11. *Une série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente.*

Remarque. *En pratique, il n'est pas toujours aisé de calculer exactement $\|f_n\|_\infty$. Par contre il n'est souvent pas trop difficile d'en trouver un majorant a_n : $\|f_n\|_\infty \leq a_n$. Si la série de terme général a_n converge, alors la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge également, et donc la série général (f_n) est normalement convergente.*

Remarque. *Attention, la réciproque de ce théorème est fausse en général : on peut trouver des suites uniformément convergentes qui ne sont pas convergentes. Par exemple, soit pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \ si \ x \in [n, n+1[, \\ 0 \ si \ x \in]-\infty, n[\cup[n+1, +\infty[. \end{cases}$$

On pourra montrer en exercice que la série de terme général f_n converge uniformément, mais pas normalement sur $\mathbb{R}$. Un défi : améliorer cet exemple pour que les fonctions f_n soient continues. L'améliorer encore pour que l'intervalle de définition soit borné.

Démonstration du théorème. Fixons d'abord $x \in I$ et montrons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est convergente. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est absolument convergente, ce qui est bien le cas puisque

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$$

et que la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge (critère de comparaison pour les séries positives).

On peut donc poser $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Montrons maintenant que la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément vers S. Rappelons que

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \qquad \forall x \in I \ .$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme la série de terme général $\|f_n\|_\infty$ est convergente, la suite de ses sommes partielles $(\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_\infty)$ possède une limite, et donc est une suite de Cauchy : il existe n_0 tel que, pour tout $p \geq 0$,

$$|\Sigma_{n+p} - \Sigma_n| \leq \varepsilon \ .$$

Or pour tout $p \geq 1$

$$|\Sigma_{n+p} - \Sigma_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_\infty.$$

On a donc, pour tout $x \in I$, $n \geq n_0$ et $p \geq 1$,

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\|_\infty \leq \varepsilon \ .$$

Lorsque $p \to +\infty$, $S_{n+p}(x) \to S(x)$. On passe à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans l'inégalité précédente pour chaque x fixé dans I et chaque $n \geq n_0$. On obtient donc : $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in I$,

$$|S(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon \ ,$$

ce qui prouve que la convergence de (S_n) vers S est uniforme. □

Les séries normalement convergentes étant uniformément convergentes, une application directe des propriétés connues pour cette convergence donne :

Proposition 4.12. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.*

- *On suppose que la série de terme général f_n converge normalement. Alors la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ est continue. De plus, pour tout intervalle fermé borné $[a, b]$ contenu dans I, la convergence de la série de terme général f_n est uniforme. En particulier on a*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(x)\, dx \ = \ \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)(x)\, dx \ ,$$

- *On suppose maintenant que les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, qu'il existe $a \in I$ tel que la série numérique de terme général $f_n(a)$ converge, tandis que la série de terme général f_n' converge normalement. Alors la fonction $\sum_{k=0}^{\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k' \, .$$

4.4 Quelques exercices

Ce qu'il faut absolument connaître pour faire les exercices :

- revoir le cours de L1 sur la continuité et la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle, ainsi que la partie du cours sur les séries pour l'étude des séries de fonctions,
- les différentes notions de convergence et leurs relations : convergence simple, uniforme d'une suite de fonctions ; convergence simple, uniforme, normale d'une série de fonctions,
- les principaux résultats sur la convergence uniforme : limite uniforme de fonctions continues, convergence uniforme et intégration, convergence uniforme et dérivation.

Exercice 4.3. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la suite de fonctions de terme général

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \qquad \forall x \in [0, +\infty[$$

converge-t-elle uniformément vers 0 sur $[0, +\infty[$?

Exercice 4.4. Montrer que la suite de fonctions

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.

Montrer que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.5. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n}$ converge uniformément vers $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$. Qu'en est-il de la suite (f_n') ?

Chapitre 5

Séries entières

Introduction. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux séries entières, c'est-à-dire aux séries de fonctions dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$. Ces séries jouent un rôle très important dans beaucoup de champs différents des mathématiques (analyse des équations différentielles, probabilités, combinatoire, etc.).

5.1 Définition

L'objet principal de ce chapitre est le suivant.

Définition 5.1. *Une série entière est une série de fonctions dont le terme général f_n est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$ où (a_n) est une suite réelle donnée. On parle alors de la série entière* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Un des enjeux concernant ces séries est le domaine où elles convergent, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. La convergence a au moins lieu en $x = 0$, évidemment !

Remarque. *On peut être amené à considérer des séries entières où le terme général a la forme $f_n(x) = a_n(x-c)^n$ où c est un réel fixé. Ce « recentrage » en $x = c$ plutôt qu'en $x = 0$ ne pose pas de problème et tous les énoncés peuvent être facilement adaptés à ce cadre.*

Remarque. *Il est parfois utile de pouvoir considérer le cas où les a_n sont complexes. On peut alors raisonner de manière distincte sur la partie réelle et la partie imaginaire tant que x est réel. Le cas où l'on remplace le réel x par un complexe z est également important, mais sort du cadre de ce cours.*

Les séries entières représentent une sous-classe particulièrement importante de séries de fonctions : en fait la plupart des fonctions usuelles possèdent une représentation sous forme de séries entières. Cela se montre avec certaines formes de la formule de Taylor.

5.2 Rayon de convergence

Définition 5.2 (Rayon de convergence)**.** *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière. Le rayon de convergence de la série entière est la borne supérieure de l'ensemble des réels r tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge, i.e.*

$$R = \sup \left\{ r \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \, converge \right\}.$$

Remarque. *Cette définition entraîne plusieurs remarques.*

- *Comme pour $r = 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = 0$ converge, on a que le rayon de convergence est positif ou nul.*
- *Le rayon de convergence est égal à $+\infty$ si pour tout $r > 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge. Il peut être nul : cela signifie que pour tout $r > 0$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ diverge.*

Pour pouvoir étudier une série entière, il est important de déterminer son domaine de convergence. C'est pourquoi l'étude des séries entières commence toujours par la détermination de son rayon de convergence. Plusieurs critères aident à cette tâche, comme nous le verrons plus bas.

Un résultat important pour l'étude des séries entières est le suivant.

Théorème 5.3 (Lemme d'Abel)**.** *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière. S'il existe un réel r_0 tel que la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée, alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ est absolument convergente pour tout r tel que $|r| < |r_0|$.*

Démonstration. Si $r_0 = 0$, il n'y a à l'évidence rien à prouver. Soit donc $r_0 \neq 0$. La suite $(a_n r_0^n)$ est bornée, disons par M. Soit r tel que $|r| < |r_0|$, alors :

$$|a_n r^n| = |a_n r_0^n| \left|\frac{r}{r_0}\right|^n \leq M \left|\frac{r}{r_0}\right|^n.$$

Comme $\left|\frac{r}{r_0}\right| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{r}{r_0}\right|^n$ est une série géométrique convergente, donc $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ converge, i.e. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ est absolument convergente. □

Corollaire 5.4. *S'il existe un réel r_0 tel que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_0^n$ converge, alors la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ est absolument convergente pour tout r tel que $|r| < |r_0|$.*

Démonstration. Si $r_0 = 0$, il n'y a encore une fois rien à prouver. Soit donc $r_0 \neq 0$. Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_0^n$ converge on a $\lim_{n\to\infty} a_n r_0^n = 0$. En particulier, cette suite est bornée (rappelons que toute suite convergente est bornée). Le résultat suit alors du lemme d'Abel ci-dessus. □

Corollaire 5.5. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence. Alors :*

- *la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ diverge pour tout $|r| > R$,*
- *la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge absolument pour tout $|r| < R$.*

Démonstration. Si $R = +\infty$ alors pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe r_0 tel que $|r| < |r_0|$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_0^n$ converge. Donc d'après le lemme d'Abel la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ est absolument convergente.

Supposons maintenant $R < +\infty$. Il est clair que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ est divergente pour tout $|r| > R$ (s'il existait $|r| > R$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge, on aurait $R \geq |r|$). Si $R > 0$ et r est tel que $|r| < R$, alors par définition de borne supérieure, il existe r_0 tel que $|r| < |r_0| \leq R$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r_0^n$ converge. Du lemme d'Abel on déduit que la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge absolument. □

Remarque. *En général la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ peut être divergente.*

Proposition 5.6. *Les définitions suivantes du rayon de convergence sont équivalentes :*

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \, \textit{converge} \right\},$$

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}, r \geq 0 \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \, \textit{converge} \right\},$$

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}, r \geq 0 \;\middle|\; (a_n r^n) \textit{ est bornée} \right\},$$

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}, r \geq 0 \;\middle|\; \lim_{n\to+\infty} a_n r^n \to 0 \right\},$$

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}, r \geq 0 \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \, \textit{converge absolument} \right\}.$$

Démonstration. Cela suit du lemme d'Abel et de ses corollaires. □

Calcul du rayon de convergence. On peut déterminer le rayon de convergence à l'aide du critère de Cauchy ou de D'Alembert.

• Si par exemple $\sqrt[n]{|a_n|} \to \ell$ (où ℓ est soit un réel, soit égal à $+\infty$), on a

$$\sqrt[n]{|a_n||x|^n} = \sqrt[n]{|a_n|}|x| \to \ell|x|,$$

sauf dans le cas indéterminé où $\ell = +\infty$ et $x = 0$, mais dans ce cas, on a zéro des deux côtés. Le critère de Cauchy dit alors que le rayon de convergence de la série est donné par $1/\ell$ si $\ell > 0$, est égal à $+\infty$ si $\ell = 0$, et à 0 si $\ell = +\infty$.

• Si $|a_{n+1}|/|a_n|$ tend vers une limite ℓ, alors comme

$$\frac{|a_{n+1}|\,|x|^{n+1}}{|a_n|\,|x|^n} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| \to \ell|x| \;,$$

le critère de D'Alembert dit que le rayon de converge vaut $1/\ell$ si $\ell > 0$, est égal à $+\infty$ si $\ell = 0$, et à 0 si $\ell = +\infty$.

On peut aussi utiliser les critères de comparaison de la manière suivante.

Proposition 5.7. *On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sont deux séries entières. On suppose qu'il existe deux constantes M et n_0 telles que, pour tout $n \geq n_0$ $|a_n| \leq M|b_n|$. Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est* supérieur ou égal *au rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.*

Démonstration. On suppose sans perte de géneralité que $n_0 = 0$. Si $r > 0$ est tel que $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| r^n$ converge, alors, par comparaison, la série $\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|/M) r^n$ converge aussi. Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge, ce qui implique le résultat. □

Corollaire 5.8. *Si les suites (a_n) et (b_n) sont équivalentes, alors les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ont même rayon de convergence.*

5.3 Opérations sur les séries entières

Le premier résultat concerne la somme de deux séries entières.

Théorème 5.9. *On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sont deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ a pour rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$ et pour tout x tel que $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

De plus si $R_a \neq R_b$ alors $R_c = \min\{R_a, R_b\}$.

Démonstration. Si $|r| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$ sont absolument convergentes donc $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) r^n$ l'est aussi. On déduit que $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.

Si maintenant on suppose de plus les rayons sont diffèrents, par exemple $R_a < R_b$: supposons $R_c > R_a$, alors il existerait r tel que $R_a < |r| < \min\{R_b, R_c\}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n$ sont absolument convergentes. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} (c_n - b_n) r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge, ce qui est absurde. Donc $R_c = \min\{R_a, R_b\}$. □

Remarque. *Dans le cas où $R_a = R_b$, il existe des suites (a_n) et (b_n) telles que $R_c > R_a = R_b$. Exercice : trouvez-en !*

Le second résultat concerne le produit de deux séries entières.

Théorème 5.10. *On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sont deux séries entières de rayons respectifs R_a et R_b. Alors la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, avec $c_n = a_0 b_n + \cdots + a_n b_0$, a pour rayon de convergence $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$ et pour tout x tel que $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right).$$

La démonstration de ce résultat, un peu longue, est omise.

On pourrait mentionner d'autres opérations (composition, division) sur les séries entières, mais ces énoncés et leur preuve sont souvent très techniques. Ces résultats sont donc laissés de côté, mais il n'est pas mauvais de savoir qu'ils existent.

5.4 Convergence, continuité, dérivabilité et intégrabilité

Théorème 5.11. *Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Si $R > 0$ la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[-r, r]$ pour tout $|r| < R$.*

La fonction $x \mapsto S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et sa dérivée est donnée par la série entière :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \forall x \in]-R, R[\ ,$$

avec rayon de convergence R.

De façon symétrique, tout primitive F de S est donnée par la série entière

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad \forall x \in]-R, R[\ ,$$

avec rayon de convergence R.

Remarque.

1. Par récurrence on déduit aisément l'expression de la dérivée p−ième de S :
$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{a_n n!}{(n-p)!} x^{n-p} \qquad \forall p \geq 0 \ ,$$
cette dernière série entière ayant un rayon de convergence égal à R.
2. En particulier, pour $x = 0$ dans l'expression précédente, on a
$$a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!} \qquad \forall p \geq 0 \ .$$

Démonstration du théorème.

1. Fixons $r \in]0, R[$. Alors
$$\sup_{x\in[-r,r]} |a_n x^n| = |a_n| r^n.$$
Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ converge, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-r, r]$. La convergence est donc uniforme sur cet intervalle. Comme les fonctions $x \mapsto a_n x^n$ sont continues sur $[-r, r]$ et comme la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge normalement vers $S(x)$ sur cet intervalle. Donc S est continue sur $[-r, r]$ pour tout $r \in]0, R[$. Cela implique la continuité de S sur $]-R, R[$: soit en effet x tel que $|x| < R$, il existe alors $r \in]|x|, R[$ et donc d'après ce qui précède S est continue sur $[-r, r]$, donc en x.

2. Montrons que si R est le rayon de convergence de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, alors R est inférieur ou égal au rayon de convergence de la série entière des dérivées :
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n,$$
et que de plus S est une primitive de g sur $]-R, R[$. Fixons $r \in]0, R[$. Soit $r_1 \in]r, R[$. Alors
$$|a_{n+1}|(n+1)r^n = |a_{n+1}| r_1^{n+1} \frac{(n+1)r^n}{r_1^{n+1}} \leq M |a_{n+1}| r_1^{n+1}$$
où M est le supremum de la suite $(\frac{(n+1)r^n}{r_1^{n+1}})$ qui est bornée, puisque cette suite tend vers 0 (rappelons que toute suite convergente est bornée). Par conséquent le terme général de la série $(|a_{n+1}|(n+1)r^n)$ est majoré par le terme général de la série $\sum_{n=0}^{\infty} M|a_{n+1}|r_1^{n+1}$, série qui converge par définition du rayon de convergence. En conclusion, la série de terme général $|a_{n+1}|(n+1)r^n$ converge pour tout $r < R$. On en déduit que le rayon de cette série entière $g(x)$ est supérieur ou égal à R. .

3. Réciproquement, si $r > R$, alors par le lemme d'Abel la suite $(a_n r^n)$ ne tend pas vers zéro, autrement elle serait bornée et donc on aurait la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tilde{r}^n$ pour tout $R < |\tilde{r}| < r$. Donc la suite $(a_{n+1} r^n)$ ne tend pas vers zéro non plus. A fortiori, la suite $((n+1)a_{n+1} r^n)$ ne tend pas vers zéro et la série $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} r^n$ diverge. Donc le rayon de convergence de $g(x)$ est inférieur ou égal à R et par l'étape précédente il est égal à R. .

4. De plus, on déduit de ce qui précède que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[-r, r]$ vers g. Comme la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge simplement vers S, le théorème de dérivation des suites de fonctions affirme que S est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $S' = g$. .

5. Enfin, le résultat pour la primitive est une application directe du théorème d'intégration des séries uniformément convergentes. $\square$

Application : résolution d'équations différentielles. Pour résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients polynômiaux, il est parfois pratique de chercher la solution sous la forme d'une série entière.

5.5 Développement d'une fonction en série entière

Dans les sections qui précèdent, on partait d'une série, et on donnait des propriétés de la limite. Dans cette section, on cherche à savoir si, une fonction étant donnée, elle peut se mettre sous la forme de la somme d'une série entière.

Définition 5.12. *Soit I un intervalle non vide, ouvert, contenant 0. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière au voisinage de 0 s'il existe une suite de réels (a_n) et un rayon $R > 0$ tels que la série entière $\sum_n a_n x^n$ ait un rayon au moins égal à R et $f(x) = \sum_n a_n x^n$ sur $]-R, R[\subset I$.*

Remarque. *Comme indiqué plus haut, le rôle de 0 est ici (comme dans toute cette partie) complètement arbitraire : en pratique il est souvent très utile d'étudier la possibilité de développer en séries entières une fonction au voisinage d'un point x_0 appartenant à l'intérieur de l'intervalle de définition de la fonction : cela signifie qu'il existe un réel $R > 0$ tel que $f(x) = \sum_n a_n(x-x_0)^n$ sur $]x_0 - R, x_0 + R[$. L'étude de cette question se ramène directement au cas où $x_0 = 0$ par translation.*

Lorsque f est développable en série entière au voisinage de 0, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et la suite (a_n) est donnée par

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \forall n \geq 0\ .$$

Il n'est cependant pas vrai en général qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-R, R[$ coïncide avec une série entière sur cet intervalle, ou même sur un intervalle plus petit. Voici un exemple.

Exemple. *Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. On vérifie aisément que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cependant, f ne coïncide avec aucune série entière au voisinage de 0 car, comme $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n, cette série entière devrait être identiquement nulle sur l'intervalle, alors que f est positive en dehors de 0.*

Comment prouver qu'une fonction est développable en série entière. Pour montrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière au voisinage de 0, il faut estimer le reste R_n dans la formule de Taylor :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

où R_n est donné, pour la formule de Taylor avec reste intégral, par

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

et, pour la formule de Taylor-Lagrange par

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_{n,x} x)}{(n+1)!} x^{n+1} \qquad \text{pour un certain } \theta_{n,x} \in [0,1].$$

Lorsque

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0 \qquad \text{si } x \in]-R, R[\ ,$$

alors f est développable en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$.

Théorème 5.13. *Soit I un intervalle non vide, ouvert, contenant 0. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[\subset I$ et s'il existe une constante M telle que :*

$$\forall x \in]-R,R[, \forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M,$$

alors f est développable en série entière au voisinage de 0.

Démonstration. Il suffit de prouver que pour tout $x \in]-R,R[$ la suite $R_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$$|R_n(x)| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right| dt \leq M \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt.$$

En calculant l'intégrale, on obtient :

$$|R_n(x)| \leq M \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x = M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

□

Voici quelques exemples qu'il faut connaître :

$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \qquad \forall x \in]-1,1[$
$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad \forall x \in]-1,1[$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$,
$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$.	

Montrons par exemple la formule pour l'exponentielle : la formule de Tayor-Lagrange donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

où

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta_{n,x} x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \qquad \text{pour un certain } \theta_{n,x} \in [0,1] \;.$$

Or

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \to 0$$

(car $|x|^{n+1}/(n+1)!$ est le terme général d'une série convergente).

5.6 Quelques exercices

Exercice 5.1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \ .$$

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in]-1, 1[$.
2. Montrer que f est continue sur $]-1, 1[$.
3. Soit F la primitive de f telle que $F(0) = 1$. Exprimez F sous la forme d'une série entière et en déduire f.

Chapitre 6

Séries de Fourier

Introduction. Les séries de Fourier sont des séries de la forme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ où (c_n) est une suite de nombres complexes. Notons qu'une telle somme est périodique de période 2π puisque toutes les fonctions $x \mapsto e^{inx}$ le sont. La question centrale de l'analyse de Fourier est de comprendre dans quelle mesure une fonction $2\pi-$périodique peut être représentée en termes de série de Fourier.

Notons deux différences par rapport aux séries de fonctions que nous avons étudiées jusqu'à présent : d'abord nous avons affaire à des fonctions à valeurs complexes ; ceci ne doit pas dérouter le lecteur, ces séries se traitant exactement comme dans le cas réel, à condition de remplacer la valeur absolue par le module. D'autre part l'indice n va de $-\infty$ à $+\infty$; nous définirons les sommes partielles par $S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ et, à nouveau, les outils d'étude sont similaires à ceux vus antérieurement.

6.1 Coefficients de Fourier

Fixons d'abord le cadre de fonctions dans lequel nous allons travailler. Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite $2\pi-$périodique si

$$f(x + 2\pi) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Définition 6.1 (Fonctions continues par morceaux)**.** *Soit f une fonction $2\pi-$périodique. On dit que f est continue par morceaux si on peut trouver un nombre fini de points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[0, 2\pi]$ avec $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\pi$ tels que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, la restriction de f à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue et que f admette une limite finie à droite et à gauche en x_i.*

Nous aurons parfois besoin d'un peu plus de régularité :

Définition 6.2 (Fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux)**.** *Soit f une fonction $2\pi-$périodique. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si on peut trouver un nombre fini de points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[0, 2\pi]$ avec $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\pi$ tels que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, la restriction de f à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ et que f et sa dérivée admettent une limite finie à droite et à gauche en x_i.*

Notons bien sûr que les fonctions continues sont continues par morceaux, tandis que les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 6.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique et continue par morceaux. On appelle* **coefficients de Fourier de** *f la famille de nombres complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par l'intégrale*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x)\, dx \qquad n \in \mathbb{Z} .$$

Remarque. *Remarquons que, comme f est $2\pi-$périodique, cette intégrale s'écrit aussi*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} e^{-inx} f(x)\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x_0 \in \mathbb{R}\ .$$

Définition 6.4. *On appelle* **développement en série de Fourier de** f *la série de fonctions*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}\ .$$

Comme indiqué précédemment, la question centrale des séries de Fourier est de reconstruire f à partir de ses coefficients de Fourier. Dans certaines circonstances, et en un sens à préciser, on pourra montrer que f coïncide avec sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}\ .$$

On introduit la suite des sommes partielles

$$s_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx},$$

qui est bien définie dès que f est $2\pi-$périodique et continue par morceaux. Lorsqu'il n'y aura pas ambiguïté, nous omettrons la dépendance de $s_N(f)$ par rapport à f : $s_N := s_N(f)$. Notons que $s_N(f)$ est elle-même une fonction $2\pi-$périodique. On dit que la série de Fourier de f converge en x si la suite $(s_N(f)(x))$ converge lorsque $N \to +\infty$.

Exemples.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $P_k(x) = e^{ikx}$. Alors

$$c_n(P_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}e^{ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ 1 & \text{si } n = k \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}\ .$$

   Le développement en série de Fourier de P_k est donc donné par $\sum_{n\in Z} c_n(P_k)e^{inx} = e^{ikx} = P_k(x)$: il coïncide avec P_k.

2. On appelle polynôme trigonométrique P toute expression de la forme $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{inx}$ où N est un entier fixé et les α_n, pour n tel que $-N \leq n \leq N$, sont des nombres complexes. Par linéarité, on montre facilement en utilisant l'exemple précédent que

$$c_n(P) = \begin{cases} \alpha_n & \text{si } -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Par conséquent, le développement en série de Fourier de P coïncide avec P.

3. Si f est périodique, définie par $f(x) = 1$ sur $[0,\pi)$, -1 sur $[\pi, 2\pi)$, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et ses coefficients de Fourier sont donnés par $c_0(f) = 0$ et, si $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-inx}\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} e^{-inx}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -2i/(n\pi) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite des sommes partielles de f a donc pour expression pour $N = 2K+1$ impair, en regroupont chaque terme en $2k+1$ avec celui en $-(2k+1)$:

$$s_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} = \sum_{k=-(K+1)}^{K} \frac{-2i}{(2k+1)\pi} e^{i(2k+1)x} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{K} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Le développement en série de Fourier de f se met donc sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Notons dans cet exemple que f diffère de son développement en série de Fourier en $x = 0$. Ceci sera expliqué plus bas par le théorème de Dirichlet.

4. Si f est périodique, définie par $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi)$, alors f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et ses coefficients de Fourier sont donnés par $c_0(f) = 0$ et, si $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx = \left[\frac{i}{2n\pi}xe^{-inx}\,dx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{i}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dx = \frac{(-1)^n i}{n}\ .$$

La suite des sommes partielles de f a donc pour expression (lorsque l'on regroupe le terme en n : avec celui en $-n$)

$$s_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx} = \sum_{n=-N,\ n\neq 0}^{N} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx} = -2\sum_{n=1}^{N}(-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Le développement en série de Fourier de f se met donc sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = -2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Coefficients de Fourier réels. Il est souvent utile de changer de notation et d'introduire les coefficients réels $(a_n(f))_{n\geq 0}$ et $(b_n(f))_{n\geq 1}$ tels que, formellement,

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$$

Comme $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$, on a, en regroupant les termes,

- $a_0(f) = c_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt,$
- $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt,\ n \in \mathbb{N}^*,$
- $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt,\ n \in \mathbb{N}^*,$

On peut inverser les formules ci-dessus pour obtenir les coefficients c_n en fonctions des a_n et b_n :

- $c_0(f) = a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt,$
- $c_n(f) = \dfrac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f))$ si $n \in \mathbb{N}^*,$

- $c_n(f) = \dfrac{1}{2}\left(a_{-n}(f) + ib_{-n}(f)\right)$ si $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$.

Voici quelques propriétés des coefficients de Fourier qu'il est bon d'avoir en tête :

Proposition 6.5. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi-$périodique, continue par morceaux. Alors*

- *si f est paire et à valeurs réelles, alors $c_n(f)$ est un nombre réel et $c_{-n}(f) = c_n(f)$,*
- *si f est impaire et à valeurs réelles, alors $c_n(f)$ est imaginaire pur, $c_{-n}(f) = -c_n(f)$ et, en particulier, $c_0(f) = 0$.*

Remarque. *Dans ce cas, les coefficients (a_n) et (b_n) sont particulièrement adaptés puisque,*

- *si f est paire, alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, la série de Fourier de f s'écrit simplement $a_0(f) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(nx)$,*
- *si f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, la série de Fourier de f s'écrit simplement $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin(nx)$.*

Démonstration. Dans le cas où f est paire, on a, puisque f est à valeur réelles,

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{-inx}}\,dx = \overline{c_n(f)},$$

et

$$\overline{c_n(f)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(-y)e^{-iny}(-dy) = c_n(f),$$

où dans l'avant-dernière égalité on a fait le changement de variables $y = -x$. On déduit de l'égalité $\overline{c_n(f)} = c_n(f)$ que $c_n(f)$ est réel et que $c_n(f)$ est pair car $c_n(f) = \overline{c_n(f)} = c_{-n}(f)$.

Le cas où f est impaire se traite de la même façon. □

Proposition 6.6 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Si f est continue par morceaux, $2\pi-$périodique sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(c_n(f))$ des coefficients de Fourier de f tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.*

Démonstration. Nous ne ferons la démonstration que dans le cas simple où f est de classe $\mathcal{C}^1$. Le cas général se montre par approximation et dépasse un peu le cadre de ce cours.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $n \neq 0$, alors on peut intégrer par parties :

$$2\pi c_n(f) = \int_0^{2\pi} e^{-inx}f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{in}e^{-inx}f(x)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} e^{-inx}f'(x)\,dx.$$

Par périodicité, le premier terme de la somme est nul. Donc

$$c_n(f) = \frac{1}{i2\pi n}\int_0^{2\pi} e^{-inx}f'(x)\,dx = \frac{1}{in}c_n(f')\ .$$

Notons que

$$\left|\frac{1}{in}\int_0^{2\pi} e^{-inx}f'(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{|n|}\int_0^{2\pi} \left|e^{-inx}f'(x)\right|\,dx = \frac{1}{|n|}\int_0^{2\pi} \left|f'(x)\right|\,dx,$$

qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ ou $-\infty$. On en déduit que $(c_n(f))$ tend vers 0. □

Nous avons prouvé en passant le résultat suivant, dont nous nous servirons par la suite :

Proposition 6.7. *Si f une fonction $2\pi-$périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors*

$$c_n(f') = (in)\ c_n(f) \qquad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Soulignons un cas dans lequel on sait conclure que la série de Fourier converge :

Proposition 6.8. *Soit (c_n) une suite de nombres complexes. Si la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge, alors la série de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.*

Plus précisément, si la suite $\sum_{n=-N}^{N} |c_n|$ admet une limite réelle lorsque $N \to +\infty$, alors la suite $\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ converge uniformément.

Remarque. *Nous verrons plus loin que, si f est $2\pi-$périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ converge.*

Démonstration. Pour $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, notons par $\|g\|_\infty = \sup_{x\in[0,2\pi]} |g(x)|$. Alors

$$\sum_{n=-N}^{N} \left\|c_n e^{inx}\right\|_\infty \leq \sum_{n=-N}^{N} |c_n| \quad \left\|e^{inx}\right\|_\infty \leq \sum_{n=-N}^{N} |c_n|$$

Par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est normalement convergente sur $[0, 2\pi]$, et donc uniformément convergente sur cet intervalle. La convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ vient directement de la périodicité. □

6.2 Convergence simple du développement en série de Fourier

Notation. Pour une fonction f, on note $f(x^+)$ (respectivement $f(x^-)$) la limite à droite (resp. à gauche) de f en x lorsque celle-ci existe.

Théorème 6.9 (de Dirichlet)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge en tout point x vers $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$:*

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} .$$

Remarque. *En particulier, si f est de surcroît continue sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement vers f. Nous verrons plus bas que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors la convergence est en fait uniforme. Il faut bien retenir que lorsque f n'est que continue et $2\pi-$périodique, il n'y a pas convergence simple de la série de Fourier de f vers f en général !*

Exemple. On reprend les exemples 3 et 4 de la série d'exemples donnés à la page 38.

3. Si f est $2\pi-$périodique, définie par $f(x) = 1$ sur $[0, \pi)$, -1 sur $[\pi, 2\pi)$, alors nous avons vu que la série de Fourier de f se met sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Le théorème de Dirichlet affirme donc que

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, \pi) \bmod 2\pi, \\ -1 & \text{si } x \in (\pi, 2\pi) \bmod 2\pi, \\ 0 & \text{si } x = 0 \bmod \pi. \end{cases}$$

4. Si f est $2\pi-$périodique, définie par $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi)$, alors la série de Fourier de f est donnée par

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = -2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n}.$$

On déduit du théorème de Dirichlet que

$$-2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n} = \begin{cases} x & \text{si } x \in (-\pi,\pi) \bmod 2\pi, \\ 0 & \text{si } x = \pi \bmod 2\pi. \end{cases}$$

Démonstration du théorème. Il suffit de montrer que la série de Fourier de f converge en 0 : par translation, on peut toujours se ramener à ce cas. Notons que $s_N(f)(0)$ s'écrit :

$$s_N(f)(0) = \sum_{n=-N}^{N} c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\sum_{n=-N}^{N} e^{-inx}\right) dx\ .$$

On introduit la fonction suivante, appelée *noyau de Dirichlet* :

$$D_N(x) := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{-inx} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ .$$

On remarque aisément que $\int_0^\pi D_n(x)\,dx = \int_{-\pi}^0 D_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$. Par conséquent, on a :

$$s_N(f)(0) - \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \int_0^\pi (f(x)-f(0^+))D_N(x)\,dx + \int_{-\pi}^0 (f(x)-f(0^-))D_N(x)\,dx\ .$$

Appelons I_N^+ la première intégrale et I_N^- la seconde. Alors

$$I_N^+ = \int_0^\pi \frac{f(x)-f(0^+)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)\,dx.$$

Nous allons montrer que la suite I_N^+ tend vers 0. Pour simplifier l'exposé, nous supposerons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$: le cas général se traite de la même façon, en travaillant sur chaque intervalle. Observons que, sous notre hypothèse, la fonction $h(x) = \frac{f(x)-f(0^+)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ est continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. On peut par conséquent introduire $M = \max_{x\in[0,\pi]}|h(x)|$.

Fixons maintenant $\varepsilon > 0$. Pour tout $N \geq 1$, on découpe I_N^+ de la manière suivante :

$$I_N^+ = \int_0^{\varepsilon/(2M)} h(x)\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)\,dx + \int_{\varepsilon/(2M)}^{\pi} h(x)\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)\,dx\ .$$

Le premier terme s'estime facilement :

$$\left|\int_0^{\varepsilon/(2M)} h(x)\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)\,dx\right| \leq \int_0^{\varepsilon/(2M)} |h(x)|\,\left|\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)\right|\,dx \leq \frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon/2\ .$$

Pour traiter le second, on intègre par parties :

$$\begin{aligned}(6.1)\quad & \int_{\varepsilon/(2M)}^{\pi} h(x)\sin\left((N+\frac{1}{2})x\right)\,dx \\ & = -\frac{1}{(N+\frac{1}{2})}\left[h(x)\cos\left((N+\frac{1}{2})x\right)\right]_{\varepsilon/(2M)}^{\pi} + \frac{1}{(N+\frac{1}{2})}\int_{\varepsilon/(2M)}^{\pi} h'(x)\cos\left((N+\frac{1}{2})x\right)\,dx.\end{aligned}$$

Comme

$$\left| \left[h(x) \cos\left((N+\frac{1}{2})x \right) \right]_{\varepsilon/(2M)}^{\pi} \right| \leq 2M$$

et

$$\left| \int_{\varepsilon/(2M)}^{\pi} h'(x) \cos\left((N+\frac{1}{2})x \right) \, dx \right| \leq \pi \max_{x\in[\varepsilon/(2M),\pi]} |h'(x)| \ ,$$

le membre de droite de (6.1) tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$. On peut donc choisir N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$\left| \int_{\varepsilon/(2M)}^{\pi} h(x) \sin\left((N+\frac{1}{2})x \right) \, dx \right| \leq \varepsilon/2 \ .$$

Alors, pour tout $N \geq N_0$, on a :

$$|I_N^+| \leq \left| \int_0^{\varepsilon/(2M)} h(x) \sin\left((N+\frac{1}{2})x \right) \, dx \right| + \left| \int_{\varepsilon/(2M)}^{\pi} h(x) \sin\left((N+\frac{1}{2})x \right) \, dx \right| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

Ceci prouve que la suite (I_N^+) tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$. On montre de même que (I_N^-) tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$, ce qui établit le résultat annoncé. □

6.3 Convergence en moyenne quadratique

Notation. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi-$périodique et continue par morceaux, on note

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} .$$

Cette quantité mesure l'écart entre f et la fonction nulle.

Théorème 6.10 (Inégalité de Bessel)**.** *On suppose que f est $2\pi-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 \ .$$

En fait, sous les mêmes hypothèses, on peut montrer le résultat beaucoup plus fort suivant :

Théorème 6.11. *On suppose que f est $2\pi-$périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors*

1. $\lim_{N\to+\infty} \|s_N(f) - f\|_2 = 0$.

2. (Identité de Parseval) De plus,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2 \ .$$

Remarques.

1. Le premier point affirme, en un certain sens, que $s_N(f)$ se rapproche de f.
2. En termes de coefficients (a_n) et (b_n), l'égalité de Parseval s'écrit :

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \|f\|_2^2 \ .$$

La démonstration du théorème est un peu délicate, et nous nous contenterons de prouver l'inégalité de Bessel. Pour cela, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 6.12. *Soit* $P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ *un polynôme trigonométrique de coefficients complexes* (c_n)*. Alors*

$$\|P\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 .$$

Démonstration. On a

$$\|P\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P(x)|^2 \, dx .$$

Comme, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z\bar{z}$, on a

$$|P(x)|^2 = \left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\right)\overline{\left(\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\right)} = \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} c_n\overline{c_m}e^{inx}e^{-imx} = \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} c_n\overline{c_m}e^{i(n-m)x}$$

Or

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m, \\ 2\pi & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Donc

$$2\pi\|P\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N}\sum_{m=-N}^{N} c_n\overline{c_m}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}\, dx = 2\pi \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2,$$

ce qui est le résultat annoncé. □

Démonstration de l'inégalité de Bessel. La fonction f étant fixée, on écrira simplement s_N pour $s_N(f)$ et c_n pour $c_N(f)$. Le lemme précédent dit que

$$\|s_N\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 .$$

Montrons maintenant que

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_N\|_2^2 + \|s_N\|_2^2 . \tag{6.2}$$

Pour cela on note d'abord (après un peu de manipulation) que

$$\begin{aligned} 2\pi\|f\|_2^2 &= \int_0^{2\pi} |f(x) - s_N(x) + s_N(x)|^2 \, dx \\ &= 2\pi\|f - s_N\|_2^2 + 2\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} (f(x) - s_N(x))\overline{s_N(x)}\, dx\right) + 2\pi\|s_N\|_2^2. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (f(x) - s_N(x))\overline{s_N(x)}\, dx &= \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx - \int_0^{2\pi} |s_N(x)|^2\, dx \\ &= 2\pi\sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 - \int_0^{2\pi} |s_N(x)|^2\, dx \\ &= 2\pi\|s_N\|_2^2 - \int_0^{2\pi} |s_N(x)|^2\, dx = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre (6.2).

De (6.2) et du fait que $\|f - s_N\|_2^2 \geq 0$, on tire que

$$\|f\|_2^2 \geq \|s_N\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 ,$$

ce qui donne l'inégalité de Bessel lorsque $N \to +\infty$. □

Remarque. *On peut montrer que l'application*

$$(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

est un produit hermitien sur l'espace des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux (cf. votre cours d'Algèbre 3 !). Dans ce cadre, ce qui précède montre que $f - s_N$ et s_N sont orthogonaux, ce qui explique (6.2) — encore une fois le théorème de Pythagore ! La difficulté ici tient à ce que l'espace des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux n'est pas de dimension finie, ce qui n'est pas sans poser certaines difficultés. Vous verrez revenir ces considérations lorsque vous aborderez l'analyse hilbertienne.

De l'inégalité de Bessel, nous pouvons montrer la convergence uniforme de la série de Fourier lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Corollaire 6.13. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et est $2\pi-$périodique, alors la série de Fourier converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Remarque. *Le lecteur pourra s'amuser à vérifier que l'assertion reste vraie lorsque f est $2\pi-$périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.*

Démonstration. Nous avons vu que lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $2\pi-$périodique, on a

$$c_n(f') = (in)\ c_n(f) \qquad \forall n \in \mathbb{Z} .$$

Comme f' est continue et $2\pi-$périodique, on a, par l'inégalité de Bessel,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n(f)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f')|^2 \leq \|f'\|_2^2 .$$

Or, d'après l'inégalité $|ab| \leq (|a|^2 + |b|^2)/2$ appliquée à $a = 1/n$ et $b = n|c_n(f)|$, on a

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2n^2} + \frac{n^2 |c_n(f)|^2}{2} \qquad \forall n \neq 0 ,$$

ce qui prouve que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|$ converge. Ceci montre la convergence normale (et donc uniforme) de la série de Fourier de f. Comme cette série converge simplement vers f par le théorème de Dirichlet, nous en déduisons que la limite uniforme de la série de Fourier de f est bien f. □

6.4 Fonctions de période quelconque

Lorsque l'on travaille avec des fonctions $T-$périodiques (où $T > 0$), les résultats du chapitre restent vrais, en modifiant les définitions de la manière suivante. Les coefficients de Fourier d'une fonction T-périodique continue par morceaux sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2i\pi nx/T} f(x)\, dx \qquad n \in \mathbb{Z} .$$

Les coefficients réels (a_n) et (b_n) sont quant à eux donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \ , \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi nt/T)dt, \ n \in \mathbb{N}^*,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi nt/T)dt, \ n \in \mathbb{N}^* \ .$$

Les séries de Fourier deviennent alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nx/T} \text{ et } a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(2\pi nx/T) + b_n\sin(2\pi nx/T)),$$

tandis que l'identité de Parseval s'écrit :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \ .$$

Chapitre 7

Appendice 1 : Rappels sur l'ordre de $\mathbb{R}$

Nous nous intéressons ici au corps des réels $\mathbb{R}$. Par corps, on veut dire qu'il est muni des quatre opérations élémentaires ($+$, $-$, $\times$, $\div$), avec les propriétés usuelles (commutativité et associativité de $+$ et $\times$, distributivité, etc.) Nous rappelons ici quelques propriétés de l'ensemble des nombres réels liées à l'ordre.

Le corps des réels $\mathbb{R}$ est un ensemble ordonné. L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une **relation d'ordre** $\leq$, c'est-à-dire d'une relation qui vérifie les conditions suivantes :

i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq x$ (la relation est *réflexive*)
ii) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors on a $x = y$ (la relation est *antisymétrique*)
iii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors on a $x \leq z$ (la relation est *transitive*)

De plus, $\mathbb{R}$ est **totalement ordonné**, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a soit $x \leq y$, soit $y \leq x$. On dit aussi que la relation $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.

Définitions liées à l'ordre.

- On dit qu'un ensemble A de $\mathbb{R}$ est **majoré** s'il existe un nombre réel M tel que tout élément de A est inférieur ou égal à M :
$$A \text{ majoré} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M\ .$$
- On dit que M est un **majorant** de A. Notons que si M est un majorant de A et si $M' \geq M$, alors M' est aussi un majorant de A.
- On dit que M est **le plus grand élément** de A si M appartient à A et M est un majorant de A. Un tel plus grand élément (s'il existe) est unique.
- De même, on dit qu'un ensemble A de $\mathbb{R}$ est **minoré** s'il existe un nombre réel m tel que tout élément de A est supérieur ou égal à m. On dit alors que m est un **minorant** de A.
- On dit que m est **le plus petit élément** de A si m appartient à A et m est un minorant de A.
- Soit A un ensemble majoré. On appelle **borne supérieure** de A le plus petit des majorants. La borne supérieure de A est donc le réel M tel que
  i) M est un majorant de A : $\forall x \in A$, on a $x \leq M$,
  ii) tout majorant de A est supérieur ou égal à M.

Remarque. *Notons qu'une telle borne supérieure est forcément unique. De plus, si la borne supérieure M d'un ensemble A appartient à A, alors M est le plus grand élément de A.*

Le résultat fondamental sur $\mathbb{R}$, qui peut même être vu comme faisant partie de sa définition, est le théorème suivant.

Théorème 7.1 (Propriété de la borne supérieure)**.** *Soit A un ensemble non vide et majoré. Alors A possède une borne supérieure.*

Un résultat tout aussi fondamental s'en déduit. Cet énoncé pourrait être au demeurant utilisé pour une définition alternative (mais équivalente) de $\mathbb{R}$.

Théorème 7.2 (des segments emboîtés)**.** *Soit (I_n) une suite de segments emboîtés, c'est-à-dire que chaque I_n est de la forme $[a_n, b_n]$ avec $a_n \leq b_n$ et que de plus $I_{n+1} \subset I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est non vide, c'est-à-dire qu'il existe un point $x \in \mathbb{R}$ appartenant à tous les intervalles I_n.*

Rappelons au passage qu'un segment est, par définition, un intervalle borné et fermé des deux côtés.

Chapitre 8

Appendice 2 : Développements limités et équivalents

8.1 Développements limités

Définition 8.1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Si on se donne un point x_0 de I et un entier $n \geq 0$, on dit que f admet un développement limité (DL) d'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = 0 \, .$$

On note traditionnellement par $\varepsilon(x)$ la fonction $\frac{f(x)-P(x-x_0)}{(x-x_0)^n}$.

Autrement dit, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ admet un DL à l'ordre n au point x_0 si l'on peut trouver $n+1$ réels $a_0, \dots a_n$ tels que

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.

Vocabulaire. Le polynôme $P(x - x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ s'appelle la *partie régulière* du DL, la partie $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ s'appelle *reste* du DL.

Remarque. *Notons que, si f admet un DL à l'ordre n en x_0, alors f admet un DL à l'ordre p pour tout entier $p \leq n$. En effet*

$$\forall x \in I, \ f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k (x - x_0)^k + (x - x_0)^p \varepsilon_1(x)$$

où $\varepsilon_1(x) = \sum_{i=p+1}^{n} (x - x_0)^{i-p} + (x - x_0)^{n-p} \varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0.

La notation $\varepsilon(x)$. Par la suite, $\varepsilon(x)$ désignera n'importe quelle quantité qui tend vers 0 lorsque x tend vers x_0 (si on fait un DL en x_0). En particulier, $\varepsilon(x)$ peut désigner deux fonctions *différentes* au sein d'une même expression, d'où des égalités du type :

$$\varepsilon(x) + \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \, , \qquad \varepsilon(x) - \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \, , \qquad \varepsilon(x).\varepsilon(x) = \varepsilon(x) \, .$$

Par contre, l'expression $\varepsilon(x)/\varepsilon(x)$ n'est pas bien définie (et ne vaut certainement pas 1 !) puisque, à nouveau, les deux $\varepsilon(x)$ désignent des fonctions numériques différentes.

Notation alternative. Une notation fréquente pour les développements limités est la *notation de Landau* qui consiste à écrire $o(1)$ (lire "petit o de 1") au lieu de $\varepsilon(x)$ et $o(x^n)$ au lieu de $x^n\varepsilon(x)$. Il faut penser à $o(1)$ comme une "fonction petite par rapport à 1", c'est-à-dire tendant vers 0. De même $o(x^n)$ est une fonction "petite par rapport à x^n", c'est-à-dire x^n fois une fonction tendant vers 0. Le lecteur pourra se faire sa propre opinion sur les deux notations concernant les développements limités. Quoi qu'il en soit, la notation de Landau est très fréquente dans la littérature scientifique, et doit donc être connue.

Proposition 8.2 (Unicité du développement limité)**.** *Il existe au plus un développement limité au voisinage de x_0 d'ordre n d'une fonction donnée.*

Une conséquence de l'unicité du DL est que les fonctions possédant certaines symétries ont une partie régulière possédant les mêmes symétries. Plus précisément :

Corollaire 8.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application ayant un DL d'ordre N en 0, de partie régulière P. Alors :*

1. *Si f est paire, alors P est pair.*
2. *Si f est impaire, alors P est impair.*

Remarque. Rappelons qu'une fonction paire (respectivement impaire) est une fonction f vérifiant $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (resp. $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Un polynôme P est pair si P est de la forme : $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_{2k}x^{2k}$ (autrement dit, les coefficients d'ordre impair sont nuls). En particulier, P est de degré pair. De même, un polynôme P est impair si P est de la forme : $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_{2k+1}x^{2k+1}$. En particulier, $P(0) = 0$ et P est de degré impair.

Le résultat suivant n'est qu'une reformulation de la formule de Taylor-Young :

Théorème 8.4. *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors f possède un développement limité d'ordre n en tout point x_0 de I, donné par :*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x - x_0)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

Les DL de certaines fonctions usuelles sont donnés dans le tableau de la page 54. Ces DL sont des conséquences du théorème précédent. Est-il utile de préciser qu'ils sont à connaître ?

Dans la suite, on s'intéresse aux opérations sur les développements limités.

Proposition 8.5 (Somme et produit de DL)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un DL d'ordre n en un point x_0, de partie régulière P et Q respectivement. Alors :*

- *la fonction $f + g$ admet un DL à l'ordre n en x_0 de partie régulière $P + Q$,*
- *la fonction fg admet un DL à l'ordre n en x_0 de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} c_k(x - x_0)^k$, où $c_0, \ldots, c_{2n}$ sont les coefficients du polynôme PQ.*

Remarque. *Notez bien que le produit de deux DL d'ordre n ne donne pas un DL d'ordre $2n$, bien que le produit PQ soit de degré $2n$.*

Proposition 8.6 (Rapport de DL). *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant un DL d'ordre n en un point x_0, de partie régulière P et Q respectivement. On suppose que $g(x_0) \neq 0$. Alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un DL à l'ordre n en x_0 dont la partie régulière est $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$, où $c_0, \ldots, c_n$ sont les coefficients du quotient suivant les puissances croissantes du polynôme P par le polynôme Q à l'ordre n.*

Rappel. Rappelons que, pour deux polynômes P et Q, avec $Q(0) \neq 0$, et pour tout entier $n \geq 1$, il existe un unique couple de polynômes (R, S), tel que $S = 0$ ou $deg(S) \leq n$ et $P = QS + X^{n+1}R$. Les polynômes S et R s'appellent respectivement le quotient et le reste de la division suivant les puissances croissantes de P par Q à l'ordre n.

Proposition 8.7 (Composition de DL). *Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL d'ordre n en un point $x_0 \in I$, de partie régulière P, avec $y_0 = f(x_0) \in J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL d'ordre n en $y_0 = f(x_0)$, de partie régulière Q donnée par $Q(y-y_0) = \sum_{k=0}^{n} b_k(y-y_0)^k$.*

Alors $g \circ f$ admet un DL en x_0 d'ordre n, dont la partie régulière est la somme des termes de degré $\leq n$ du polynôme $b_0 + b_1(P(x-x_0)-y_0) + \cdots + b_n(P(x-x_0)-y_0)^n$.

Proposition 8.8 (Primitive de DL). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL d'ordre n en un point x_0 de partie régulière donnée par $P(x-x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$. Si F est une primitive de f, alors F admet un DL en x_0 à l'ordre $n+1$, de partie régulière donnée par*

$$Q(x-x_0) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} .$$

Remarque. *Notons que Q est rien d'autre que la primitive de P qui vaut $F(x_0)$ en 0.*

8.2 Application des développements limités à la recherche d'équivalents

Définition 8.9 (Suites équivalentes). *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) (en $+\infty$) si le rapport u_n/v_n est défini à partir d'un certain rang et si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On note $u_n \sim v_n$.*

Proposition 8.10. *La relation "(u_n) est équivalente à (v_n)" est une relation d'équivalence.*

On pourra donc dire que les suites "(u_n) et (v_n) sont équivalentes".

Démonstration.

1. La relation est évidemment reflexive.

2. Comme la suite (u_n/v_n) tend vers 1, (u_n/v_n) est non nulle à partir d'un certain rang. Alors la suite (v_n/u_n) tend vers $1/1 = 1$. La relation est donc symétrique.

3. Montrons qu'elle est transitive : soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles, avec (u_n) équivalente à (v_n) et (v_n) équivalente à (w_n). Alors, comme (v_n) et (w_n) sont non nulles à partir d'un certain rang, on a

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{v_n}{w_n} .$$

Par hypothèse, les suites (u_n/v_n) et (v_n/w_n) tendent vers 1. Donc la suite (u_n/w_n) tend également vers 1, c'est-à-dire que (u_n) est équivalente à (w_n). □

Remarque. *Attention : ne jamais écrire $u_n \sim 0$! Cela est contraire à la définition donnée ci-dessus, et est une assurance d'écrire des choses fausses...*

Proposition 8.11. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Si (u_n) possède une limite (finie ou infinie), alors (v_n) possède la même limite.*

Remarque. *En particulier, si (u_n) tend vers une limite ℓ* **non nulle**[1]*, alors (u_n) est équivalente à la suite constante ℓ. Cependant, même si (u_n) tend vers 0, la suite (u_n) n'est jamais équivalente à la suite constante 0 (cf. la définition de suites équivalentes).*

Démonstration. En effet, comme u_n est non nul à partir d'un certain rang, on peut écrire : $v_n = \frac{v_n}{u_n} u_n$. Or (v_n/u_n) tend vers 1. Donc (v_n) tend vers la même limite que (u_n). □

Le résultat suivant affirme qu'on peut multiplier et diviser les équivalents. Nous verrons par la suite qu'en général, on ne peut pas additionner ceux-ci.

Proposition 8.12. *Soient (u_n), (v_n), (z_n) et (w_n) quatre suites réelles. On suppose que (u_n) et (v_n), ainsi que les suites (z_n) et (w_n) sont équivalentes. Alors les suites $(u_n z_n)$ et $(v_n w_n)$ sont équivalentes. De même, les suites (u_n/z_n) et (v_n/w_n) sont équivalentes.*

Démonstration. Il suffit de noter que

$$\frac{u_n z_n}{v_n w_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{z_n}{w_n} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty,$$

tandis que

$$\frac{u_n/z_n}{v_n/w_n} = \frac{u_n}{v_n}\frac{w_n}{z_n} \to 1 \text{ quand } n \to +\infty \ .$$

□

Remarque. *On ne peut pas additionner des équivalents en général. Soient $u_n = v_n = n$, $z_n = -n$ et $w_n = -n + \sqrt{n}$. Alors (u_n) et (v_n) sont des suites équivalentes, et il en est de même pour les suites (z_n) et (w_n). Mais $u_n + z_n = 0$ n'est pas équivalente à $v_n + w_n = \sqrt{n}$.*

De la même manière que pour les suites, on peut définir la notion de fonctions équivalentes.

Définition 8.13 (Fonctions équivalentes)**.** *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un intervalle ouvert contenant le point $a \in \mathbb{R}$ (respectivement $+\infty$ ou en $-\infty$). On dit que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ au voisinage de a (resp. en $+\infty$ ou en $-\infty$) si le rapport $f(x)/g(x)$ est défini sur un intervalle ouvert contenant a (resp. pour x assez grand ou pour x assez négatif) et si*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (\textit{resp. si} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad \textit{ou si} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1).$$

On note $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to a$ (resp. lorsque $x \to +\infty$ ou lorsque $x \to -\infty$).

Proposition 8.14. *La relation "$f(x)$ est équivalente à $g(x)$ au voisinage de a" est une relation d'équivalence.*

La démonstration est identique à l'assertion similaire pour les suites, et nous la laissons en exercice.

Comme pour les suites, on peut multiplier et diviser les équivalents. Par contre, en général, on ne peut pas additionner ni composer ceux-ci.

1. Quand un enseignant met une partie de phrase en gras, il espère en général que le lecteur y portera une attention particulière.

Théorème 8.15. *Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 quatre applications. On suppose que f_1 et f_2, ainsi que g_1 et g_2 sont équivalentes au voisinage d'un point a (resp. $+\infty$ ou $-\infty$). Alors les fonctions $(f_1g_1)(x)$ et $(f_2g_2)(x)$ sont équivalentes au voisinage de a (resp. $+\infty$ ou $-\infty$).*

De même, les fonctions $(f_1/g_1)(x)$ et $(f_2/g_2)(x)$ sont équivalentes au voisinage de a (resp. $+\infty$ ou $-\infty$).

Démonstration. Elle est identique à celle de la Proposition 8.12. □

Remarque. *On ne peut pas additionner des équivalents en général. Par exemple, si $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x + x^2$, tandis que $g_1(x) = -x + x^3$ et $g_2(x) = -x$, alors f_1 et f_2 sont équivalents en 0, de même que g_1 et g_2. Mais $(f_1 + g_1)(x) = x^3$ n'est pas équivalent en 0 à $(f_2 + g_2)(x) = x^2$.*

Remarque. *De même, on ne peut pas composer des équivalents. Par exemple $f(x) = x$ est équivalent en $+\infty$ à $g(x) = x + \sqrt{x}$, mais $\exp(f(x)) = e^x$ n'est pas équivalente à $\exp(g(x)) = e^x e^{\sqrt{x}}$ (le rapport $\exp(f(x))/\exp(g(x))$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$).*

Expliquons maintenant comment les DL peuvent être utilisés pour trouver des équivalents :

Proposition 8.16. *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que f possède un DL d'ordre $N \geq 0$ au voisinage de x_0. Soit $P(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots a_N(x - x_0)^N$ la partie régulière de DL. Alors f est équivalent en x_0 à $a_k(x - x_0)^k$, où k est le plus petit indice tel que $a_k \neq 0$.*

Exemple. *Comme $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)$ (d'après le DL de $\cos$ à l'ordre 5 en 0), $1 - \cos(x)$ est équivalent à $\frac{x^2}{2}$ en 0.*

Démonstration. Le DL de f à l'ordre N en x_0 s'écrit

$$f(x) = a_k(x - x_0)^k + a_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \cdots + a_N(x - x_0)^N + (x - x_0)^N\varepsilon(x) ,$$

puisque $a_0 = \cdots = a_{k-1} = 0$ par définition de k. Donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{a_k(x - x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}(x - x_0)^1 + \cdots + \frac{a_N}{a_k}(x - x_0)^{N-k} + \frac{1}{a_k}(x - x_0)^{N-k}\varepsilon(x)\right) = 1 .$$

□

Une remarque sur le lien entre équivalents de fonctions et de suites. Remarquons que si on a deux fonctions équivalentes $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to a$, et que (u_n) est une suite numérique convergeant vers a, alors, bien sûr, $f(u_n) \sim g(u_n)$: il suffit de regarder les définitions et de se souvenir de la caractérisation séquentielle des limites. Mais cela ne veut pas dire que l'on peut composer les équivalents ! Ici, on a en quelque sorte “remplacé la variable x” par le terme d'**une même suite** u_n...

DL à l'ordre n en $x_0 = 0$	$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x)$
DL à l'ordre n en $x_0 = 0$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n \varepsilon(x)$
DL à l'ordre $n+1$ en $x_0 = 0$	$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + x^{n+1} \varepsilon(x)$
DL à l'ordre $2n+1$ en $x_0 = 0$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1} \varepsilon(x)$
DL à l'ordre $2n+2$ en $x_0 = 0$	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+2} \varepsilon(x)$
DL à l'ordre 2 en $x_0 = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \notin \{0, 1\}$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha - 1) \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$
DL à l'ordre 4 en $x_0 = 0$	$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4 \varepsilon(x)$

Table 8.1 – Quelques développements limités usuels

Chapitre 9

Appendice 3 : L'intégrale définie

9.1 Existence d'une primitive et définition de l'intégrale

Théorème 9.1 (Existence d'une primitive)**.** *Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive sur I, i.e., il existe une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que*

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)\ .$$

Remarque. *La fonction f admet en fait une infinité de primitives sur l'intervalle I, deux primitives ne différant que d'une constante.*

Proposition 9.2. *Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et λ un nombre réel. Soient F une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I. Alors*

i) $(F + G)$ est une primitive de $(f + g)$ sur I.

ii) λF est une primitive de λf sur I.

Démonstration. Il suffit de dériver. □

Dans le tableau de la page 58, on rappelle les primitives de quelques fonctions usuelles. Oui, il est nécessaire de les connaître.

Définissons maintenant l'intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$:

Définition 9.3. *Soient I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, a et b deux points de I. L'intégrale de f entre a et b est définie par*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

Remarques.

1. Comme deux primitives ne diffèrent que d'une constante, la quantité ci-dessus ne dépend pas du choix particulier de la primitive.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert I, alors, pour tout $a \in I$, une primitive de f est donnée par
$$\forall x \in I, \qquad F(x) = \int_a^x f(s)ds\ .$$

Voici quelques propriétés élémentaires de l'intégrale.

Proposition 9.4.

1. **Linéarité de l'intégrale** *Si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors*
$$\int_a^b (f_1+f_2)(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b (\lambda f_1)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f_1(x)\,dx\ .$$

2. **Relation de Chasles** *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et $c \in [a,b]$, alors*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\ .$$

3. **Positivité de l'intégrale** *Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et positive sur $[a,b]$, c'est-à-dire $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.*

Une conséquence importante du dernier point est que l'intégrale conserve la relation d'ordre ainsi que décrit dans le résultat suivant.

Proposition 9.5. *Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur un intervalle sur $[a,b]$. Si*
$$\forall x \in [a,b]\ , f_1(x) \leq f_2(x) \text{ alors } \int_a^b f_1(x)\,dx \leq \int_a^b f_2(x)\,dx\ .$$

En particulier, on a toujours :

Proposition 9.6. *Si $a \leq b$, on a :*
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\ .$$

Démonstration. Comme $f \leq |f|$, on a $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, et comme $-f \leq |f|$, on a aussi $-\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. D'où le résultat. □

9.2 Calcul d'intégrales

On possède deux outils principaux pour calculer une intégrale : l'intégration par parties et la formule de changement de variables.

Théorème 9.7 (Intégration par parties)**.** *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Alors, si G est une primitive de g sur $[a,b]$, on a*
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx\ ,$$
où l'on a utilisé la notation classique $[f(x)G(x)]_a^b = f(b)G(b) - f(a)G(a)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que, comme $(fG)' = fG' + f'G = fg + f'G$, on a
$$[f(x)G(x)]_a^b = \int_a^b (fG)'(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f'(x)G(x)\,dx\ .$$

□

Théorème 9.8 (Changement de variable)**.** *Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue et $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Alors*

$$\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(y)\,dy\ .$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi)\varphi'$. Donc

$$\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = [F \circ \varphi]_c^N = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(y)dy\ .$$

□

Un moyen mnémotechnique pour se souvenir de ce changement de variable est de poser $y = \varphi(x)$ et d'écrire que, formellement, $dy = \varphi'(x)\,dx$. On remplace alors systématiquement dans l'intégrale $\int_c^d f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, $\varphi(x)$ par y et $\varphi'(x)\,dx$ par dy. De plus, il ne faut pas oublier de changer les bornes d'intégration : quand x vaut c (resp. d), $y = \varphi(x)$ vaut $\varphi(c)$ (resp. $\varphi(d)$).

Remarque. *Très souvent, on veut se servir de la formule de changement de variables dans l'autre sens : on connait $\int_c^d f(y)dy$, et on voudrait effectuer le changement de variables $x = \psi(y)$. Cela n'est possible que si ψ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ sur son image, et d'inverse $\mathcal{C}^1$. Alors on peut écrire*

$$\int_c^d f(y)dy = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(\psi^{-1}(x))(\psi^{-1})'(x)\,dx\ .$$

Fonction	Primitive(s)
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + cte$
$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x) + cte$
$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x) + cte$
$f(x) = x^\alpha$ (pour $\alpha \neq -1$ et $x > 0$)	$F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ (pour $x > 0$)	$F(x) = \log(x) + cte$
$f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$F(x) = \arctan(x) + cte$

TABLE 9.1 – Quelques primitives classiques