Université de Paris Dauphine
Année universitaire 2017-2018
Analyse 3, Licence MIE 2ème année

Chapitre 5: Séries de Fourier

Exercice 1. On définit la fonction paire et 2π-périodique f sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = \pi^2 - x^2$.

1) Développer f en série de Fourier.

2) En déduire

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de période 2π donnée par:

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = \cosh(\alpha x).$$

1) Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction f.

2) Calculer la somme de la série de Fourier de f.

3) En déduire la valeur des séries numériques

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = e^{-x}.$$

1) Calculer les coefficients de Fourier complexes de f.

2) En déduire que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique, définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4} \text{ si } |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) Calculer les coefficients de Fourier de f.

2) En déduire la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 5. Soit $0 < \theta < 1$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2\theta \cos x + \theta^2}.$$

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx),$$

où les (a_n) vérifient, pour tout $n \geq 1$,

$$\theta a_{n+1} - (1 + \theta^2) a_n + \theta a_{n-1} = 0.$$

2) Calculer a_0, a_1 et trouver α et β tels que

$$a_n = \alpha \theta^n + \frac{\beta}{\theta^n}.$$

3) En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{1 - \theta^2}{1 - 2\theta \cos x + \theta^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \theta^n \cos(nx).$$

4) Peut-on retrouver ce résultat par d'autres moyens ?

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ irrationnel et soit f une fonction 1-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha k) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Indication: on pourra commencer par montrer le résultat pour $f(x) = e^{2i\pi kx}$.

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| \neq 1$. Calculer pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikx}}{\alpha - e^{ix}} dx.$$

Indication: on exprimera $(\alpha - e^{ix})^{-1}$ *comme somme d'une série géométrique bien choisie.*

Exercice 8. Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ suivantes:

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = (\sin x)^3.$$

1) Calculer les coefficients de Fourier de f et g.

2) Que donne la formule de Parseval dans ces 2 cas ?

Exercice 9. Soit $0 < \alpha < \pi$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \; f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq \alpha, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1) Déterminer les coefficients de Fourier de f.

2) Calculer la somme de la série de Fourier de f et en déduire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\alpha)}{n}.$$

3) Calculer les sommes des séries suivantes:

$$(i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(n\alpha)}{n^2}.$$

Exercice 10. (*Inégalité de Sobolev*) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, vérifiant

$$\int_0^T f(x)dx = 0.$$

Montrer qu'il existe une constante universelle $C > 0$ telle que

$$\|f\|_\infty \leq C\|f'\|_2.$$