Université Paris-Dauphine
Analyse 3 (L2)
24 septembre 2018

Année universitaire 2018-2019
Responsable : Olivier Glass
Durée : 1h30

Contrôle continu 1

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies.

Exercice 1 (2+2 points)**.**

1. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
2. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ n'est pas de Cauchy.

Exercice 2 (4 points)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|r_{n+p} - r_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

2. En déduire que la suite r_n est convergente.

Exercice 3 (8 points)**.** Donner un développement, lorsque n tend vers $+\infty$, de ...

— $a_n = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2n}}{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2n^2}}$ au premier ordre, *i.e.* en donner un équivalent,

— $b_n = \ln\left(n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ à l'ordre 2, *i.e.* à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

— $c_n = \exp\left(n^2\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right)\right) - 1$ à l'ordre 2, *i.e.* à la précision $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

— $d_n = \left(\ln(n) + \exp\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right) - 1\right)\right)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2, *i.e.* à la précision $o\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right)$,

Exercice 4 (4 points + 2 points bonus hors barême)**.** Soient a_0 et a_1 deux nombres réels. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la façon suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n+1}\right).$$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite lorsque $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|a_1 - a_0|}{2^n}.$$

3. La suite a_n est elle convergente ?
4. *(Question bonus)* Calculer la limite de a_n en fonction de a_0 et a_1.
(Indication : On pourra commencer par montrer que la suite $a_{n+1} + \frac{a_n}{2}$ est constante.)