Université Paris-Dauphine
Département MIDO
DE MI2E deuxième année

Algèbre linéaire 3
année 2018/2019

Feuilles de travaux dirigés

Le symbole $\diamond$ indique un exercice difficile.
Dans certains des exercices, la matrice transposée d'une matrice A sera indifféremment notée ${}^{\mathsf{t}}A$ ou A^{T} (cette dernière notation étant celle recommandée par la norme `ISO 80000-2:2009`).

1 Révisions

Exercice 1. (sous-espaces vectoriels) Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants, indiquer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel et, le cas échéant, en donner la dimension et une base, préciser s'il s'agit de l'espace entier ou en donner un supplémentaire.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x + 2y + z \geq 0\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy - yz = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x - y = 1\}$.
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 - y + z = 0\}$.
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x + 2y^2 + 4z = 0\}$.
6. $E_6 = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$.
7. $E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y = 0\}$.

Exercice 2. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille de vecteurs est libre et donner la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille.

1. $\{(9, 2), (8, -3), (\frac{3}{2}, \frac{7}{3})\}$.
2. $\{(6, 0, -5), (-1, 2, 1), (0, 1, -1)\}$.
3. $\{(5, -4, 7, 8), (-\frac{5}{2}, 3, 1, -2)\}$.
4. $\{(-1, 2, 1, 4), (0, 3, -1, 2), (-2, 1, 3, 6)\}$.

Exercice 3. Déterminer l'intersection des plans P_1 et P_2 de $\mathbb{R}^3$ dans chacun des cas suivants.

1. P_1 a pour équation cartésienne $x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0$ et P_2 a pour base $\{(1, 0, 2), (0, 1, 3)\}$.
2. P_1 et P_2 ont pour équation cartésienne $x_1 - 2\,x_2 + x_3 = 0$ et $a\,x_1 + b\,x_2 + x_3 = 0$ respectivement.
3. P_1 et P_2 ont pour base $\{(1, 1, 1), (1, 2, 0)\}$ et $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ respectivement.

Exercice 4. On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que le plan P d'équation cartésienne $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et la droite D de vecteur directeur u, de coordonnées $(a, 1, 1)$ dans la base canonique, soient deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
2. On suppose à présent que $a = 1$. Vérifier que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$. Déterminer une base $\{e_1, e_2\}$ de P. Pourquoi la famille $\{e_1, e_2, u\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Déterminer les coordonnées dans cette nouvelle base du vecteur ayant pour coordonnées $(1, 2, 3)$ dans la base canonique.

Exercice 5. On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à trois. On considère les sous-espaces vectoriels de E suivants :

$$H = \{P \in E \,|\, P(2) = 0\}$$

et

$$D = \{P \in E \,|\, P(1) = P'(1) = P''(1) = P'''(1)\}\,.$$

1. Rappeler quelle est la dimension de E et donner sa base canonique.
2. Donner une équation et trouver une famille génératrice de H. Quelle est la dimension de ce sous-espace ?

3. Écrire la formule de Taylor pour un polynôme P appartenant à D et en déduire la forme générale des éléments de D. Quelle est la dimension de ce sous-espace ?

Exercice 6. (polynômes de Lagrange) On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à trois.

1. Déterminer les quatre polynômes L_k, $k = 0, 1, 2, 3$, de E tels que

$$\forall k \in \{0,1,2,3\},\ L_k(k) = 1 \text{ et },\ \forall i \in \{0,1,2,3\} \setminus \{k\},\ L_k(i) = 0.$$

2. Montrer que la famille $\{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ est une base de E et donner les coordonnées d'un polynôme quelconque de E dans cette base.

Exercice 7. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ ayant pour noyau le plan P défini dans l'exercice 4 et telle que $f((1,1,1)) = (1,2,3)$. Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis dans la base $\{e_1, e_2, u\}$ déterminée dans l'exercice 4.

Exercice 8. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux.

1. Montrer que $\{1, X, X^2\}$ et $\{1, X-1, X^2\}$ sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de passage de $\{1, X, X^2\}$ vers $\{1, X-1, X^2\}$.
3. Déterminer la matrice de l'endomorphisme de E défini par $P \mapsto P'$ dans ces deux bases.

Exercice 9. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^4,\ f(x) = 2\,x_2 - x_3 + x_4.$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.
2. Trouver une base de son noyau et vérifier que ce dernier est un hyperplan.

Exercice 10. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires ?

Exercice 11. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f n'est pas bijectif.
2. Montrer que $\{f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$ est une base de l'image de f.
3. Calculer $f((1,-2,1,0))$
4. Déduire des questions précédentes la dimension du noyau de f et la forme générale de ses éléments.

Exercice 12. (diagonalisation)

1. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

et calculer

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{2}A\right)^k.$$

2. Soit B la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de B ainsi que les racines de celui-ci.

(b) Si B était diagonalisable, quelle serait la matrice diagonale en question ? En déduire que B n'est pas diagonalisable.

2 Formes bilinéaires

Exercice 13. Donner l'expression de la forme bilinéaire associée à chacune des matrices suivantes relativement à la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels d'ordre 2. On considère l'application b de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (A, B) \in M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}),\ b(A, B) = \operatorname{tr}({}^{\mathsf{t}}AB).$$

1. Vérifier que b est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. Montrer que pour tout A de E, $b(A, A) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $A = 0_2$.
3. Déterminer la matrice de b relativement à la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 15. Soit

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ \forall y \in \mathbb{R}^3,\ b(x, y) = d(y, x) = x_1y_1 + 2\,x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3.$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ et d une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$. Déterminer les matrices A et B de b et d relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$. Quelle relation a-t-on entre ces matrices ?
2. Écrire b et d dans les bases canoniques de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$.
3. Déterminer les matrices de b et d en considérant la base $\{(1, 0), (1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ et la base $\{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de E et b une forme bilinéaire sur E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $b(x, y)$, $b(x, x)$ et $b(y, y)$ dans les deux cas suivants :
   (a) $x = e_1 + \mathrm{i}\, e_2$ et $y = e_1 - \mathrm{i}\, e_2$,
   (b) $x = e_1 + 2\, e_2$ et $y = \mathrm{i}\, e_2$.
2. Trouver une base de E relativement à laquelle la forme b a pour matrice I_2. En déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{\mathsf{T}}MP = I_2$.

Exercice 17. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^3$ de la forme

$$b(x, y) = \lambda_1\, x_1y_1 + \lambda_2\, x_2y_2 + \lambda_3\, x_3y_3 + \lambda_4\, x_1y_2 + \lambda_5\, x_2y_1,$$

où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. Quelle est sa dimension ?
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, où $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$) désigne l'ensemble des formes bilinéaires symétriques (resp. antisymétriques) sur $\mathbb{R}^3$. Quelles sont leurs dimensions respectives ?
3. Montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$.

Exercice 18. On définit l'application b de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$b\ :\ (A, B) \mapsto \det(A + B) - \det(A - B).$$

Montrer que b est une forme bilinéaire et déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 19. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et E^* son dual, $\mathcal{B}$ une base quelconque de E et $\mathcal{B}^*$ la base duale associée à $\mathcal{B}$. Montrer que la matrice de la forme bilinéaire canonique de $E \times E^*$ dans $\mathbb{K}$, définie par

$$\forall x \in E,\ \forall f \in E^*,\ \langle x, f\rangle_{E,E^*} = f(x),$$

relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ est la matrice identité.

Exercice 20. Soit n un entier naturel non nul et E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$, muni de la base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$. On note $\mathcal{B}^* = \{{e_1}^*, \dots, {e_1}^*\}$ la base duale associée à $\mathcal{B}$. Pour tout couple (i, j) de $\{1, \dots, n\}^2$, on pose

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ \gamma_{ij}(x, y) = {e_i}^*(x){e_j}^*(y).$$

1. Montrer que γ_{ij} est une forme bilinéaire sur $E \times E$.
2. Déterminer la matrice de γ_{ij} relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que la famille $(\gamma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ forme une base de $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{R})$.

Exercice 21. (cône isotrope) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et b une forme bilinéaire symétrique définie sur E.

1. Soit x un élément de E. Montrer que

$$x \text{ est isotrope pour } b \implies \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\, x \text{ est isotrope pour } b.$$

2. Soit x et y deux éléments de E qu'on suppose isotropes pour b. Montrer que

$$x + y \text{ est isotrope pour } b \implies x \text{ et } y \text{ sont orthogonaux pour } b.$$

Exercice 22. $\diamond$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $b : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire telle que

$$\forall (x, y) \in E \times E,\ b(x, y) = 0 \Longrightarrow b(y, x) = 0.$$

Montrer que b est soit symétrique, soit antisymétrique.

Exercice 23. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ b(P, Q) = \int_0^1 P(t) Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice de b relativement à la base canonique $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ de E.
3. Quel est le rang de b ?
4. La forme b est-elle symétrique ? Antisymétrique ? Déterminer sa partie symétrique et sa partie antisymétrique.
5. A-t-on $b(P, P) \geq 0$ pour tout polynôme P de E ? À quelle condition sur P a-t-on $b(P, P) = 0$?

Répondre aux mêmes questions avec $b(P, Q) = \int_0^1 P(t) Q(1-t)\,\mathrm{d}t$ et $b_k(P, Q) = \sum_{i=1}^{k} P(i) Q(i)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 24. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On considère l'application φ de $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{R})$ dans $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{R})$ telle que

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, E; \mathbb{R}),\ \forall (x, y) \in E^2,\ \varphi(f)(x, y) = f(y, x).$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E, E; \mathbb{R})$.
2. Déterminer les valeurs propres de φ, ainsi que les sous-espaces propres correspondants.

3 Formes quadratiques

Exercice 25. Déterminer lesquelles des applications suivantes définissent une forme quadratique et, le cas échéant, donner leur forme polaire.

1. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = P(0)P(1)P(2)$.
2. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = 2\,P(1)P'(1)$.
3. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $q(P) = |P(0)P(1)|$.

Exercice 26. Soit q l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in M_2(\mathbb{R}),\ q(A) = \det(A).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et écrire la matrice qui lui est associée relativement à la base canonique.
2. Déterminer la signature, le rang et le noyau de q.
3. Soit F l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et déterminer son orthogonal par rapport à q.

Exercice 27. On considère la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = {x_1}^2 + 4\,{x_2}^2 - 3\,x_1 x_2.$$

1. Déterminer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

2. Donner la forme polaire de q.
3. Réduire q sous la forme d'une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Exercice 28. Effectuer une réduction de Gauss, puis déterminer la signature, le rang et le noyau, des formes quadratiques suivantes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = 2\,{x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 - {x_3}^2 - 4\,x_1x_2 - 2\,x_2x_3 - 2\,x_1x_3$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 + 3\,{x_3}^2 - 2\,x_1x_2 - 4\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + 5\,{x_2}^2 + 3\,{x_3}^2 + 4\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + (1+a){x_2}^2 + (1+a+a^2){x_3}^2 + 2\,x_1x_2 - 2a\,x_2x_3$ (on discutera suivant la valeur du paramètre réel a).
5. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $q(x) = {x_1}^2 + {x_2}^2 - a\,{x_3}^2 + 3\,x_1x_2 - b\,x_1x_3 + x_2x_3$ (on discutera suivant les valeurs des paramètres réels a et b).
6. $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = {x_1}^2 + (1+2a-b)\,{x_2}^2 + (1+a)\,{x_3}^2 + (1+2a+b)\,{x_4}^2 + 2\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3 - 2\,x_1x_4 + 2(1-a)x_2x_3 - 2(1+a)x_2x_4 + 2(a-1)\,x_3x_4$ (on discutera suivant les valeurs des paramètres réels a et b).
8. $\forall x \in \mathbb{R}^5$, $q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_2 - x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 - x_3x_5 + 2\,x_5x_4$.

Exercice 29. Déterminer la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la signature et le rang des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ suivantes.

1. $q(x) = \sum_{i,j=1}^n x_ix_j$.
2. $q(x) = \sum_{i,j=1}^n j^2x_ix_j$.

Exercice 30. $\diamond$ La matrice symétrique $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? Définie ?

Exercice 31. Soit q la forme quadratique définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ q(x) = 4\,{x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 + 10\,{x_3}^2 + 2\,x_1x_2 + 10\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3.$$

1. Écrire la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la forme q est définie positive en utilisant le critère de Sylvester.
3. De la même façon, étudier la forme $q(x) = 4\,{x_1}^2 + 2\,{x_2}^2 + 9\,{x_3}^2 + 2\,x_1x_2 + 10\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3$.

Exercice 32. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et b une forme bilinéaire sur E. On note q la forme quadratique associée à b.

1. Établir que

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ q(x+y) + q(y+z) + q(x+z) - q(x+y+z) = q(x) + q(y) + q(z).$$

2. Établir que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ q(x+y) + q(x-y) = 2\,q(x) + 2\,q(y) \text{ et } q(x+y) - q(x-y) = 2\,b(x,y) + 2\,b(x,y).$$

Exercice 33. Soit q la forme définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ q(P) = P(0)P(1).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique.
2. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. La forme q est-elle positive ? Négative ?
4. Déterminer une base (P_0, P_1, P_2) de E telle que $q\left(\sum_{i=1}^2 a_iP_i\right) = a_0^2 - a_1^2$ et donner la signature de q.

Exercice 34. Soit n un entier strictement positif. Pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$b(P,Q) = \int_0^1 t\,P(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } q(P) = f(P,P).$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?
2. Montrer que q est une forme quadratique. Est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.
3. Calculer la matrice de q relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Pour $n = 2$, déterminer la signature de q. La forme q est-elle positive ? Négative ?
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit orthogonale par rapport à q.

Exercice 35. Soit n un entier strictement positif. On considère la forme q définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ q(P) = \int_{-1}^{1} P(t)P(-t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que tout polynôme P peut s'écrire comme la somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair.
2. Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa signature.

Exercice 36. Soit n un entier strictement positif et q_1 et q_2 deux applications respectivement définies par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ q_1(A) = (\mathrm{tr}(A))^2 \text{ et } q_2(A) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA).$$

Montrer que q_1 et q_2 sont des formes quadratiques. Sont-elles positives ? Définies positives ?

Exercice 37. Soit n un entier strictement positif et q l'application de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ q(A) = \mathrm{tr}\left(A^2\right).$$

1. Montrer que q est une forme quadratique et donner son noyau,
2. Montrer que la restriction de q au sous-espace des matrices symétriques est définie positive.
3. Donner une base de $M_n(\mathbb{R})$ relativement à laquelle la matrice associée à q est diagonale. Expliciter cette matrice et donner la signature de q.

Exercice 38. Soit

$$E = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, a_{11} - a_{22} = 0\} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour toutes matrices A et B de V, on pose

$$b(A, B) = \mathrm{tr}(AJB).$$

1. Montrer que b est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de E.
3. Déterminer la matrice de la forme quadratique q associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$.
4. Déterminer la signature de q, son rang et son noyau.
5. Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal par rapport à q de l'ensemble

$$F = \{A \in E \,|\, a_{12} = a_{21} = 0\}.$$

Exercice 39. Soit λ et μ deux nombres réels. On définit sur $E = M_2(\mathbb{R})$ la forme q suivante

$$\forall A \in E,\ q(A) = \lambda\,\mathrm{tr}(A^2) + \mu\,\det(A).$$

1. Vérifier que q est une forme quadratique.
2. Déterminer en fonction de λ et de μ le rang et la signature de q, en séparant les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$.

Exercice 40. Soit une forme quadratique définie sur un espace vectoriel réel, que l'on suppose définie. Montrer qu'elle garde un signe constant.

Exercice 41. (forme quadratique de trace nulle) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Si q est une forme quadratique sur E, on appelle *trace* de q la trace de toute matrice de q dans une base orthonormée.

1. Montrer que cette définition a bien un sens.

On souhaite démontrer que la trace de q est nulle si et seulement s'il existe une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E telle que $q(e_i) = 0$ pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$.

2. Montrer l'implication réciproque.

3. On suppose maintenant que la trace de q est nulle.
   (a) Trouver un vecteur e_1 de norme unitaire tel que $q(e_1) = 0$.
   (b) En déduire la propriété voulue.

Exercice 42. (une norme) Soit l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\ q(x) = {x_1}^2 + x_1 x_2 + {x_2}^2.$$

On pose $N = \sqrt{q}$.

1. Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer le plus petit nombre $C > 0$ et le plus grand nombre $c > 0$ tels que $c\,\|\cdot\|_2 \leq N \leq C\,\|\cdot\|_2$, où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ ($\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\|x\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$).
3. Dessiner la boule unité pour cette norme.

Exercice 43. (produit de Schur de deux matrices) Soit $n$un entier naturel supérieur ou égal à 2, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$. On définit le *produit de Schur de A et de B* comme étant la matrice $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

1. Si A est positive et de rang 1, montrer en utilisant la réduction de Gauss de la forme quadratique associée à A qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $a_{ij} = \lambda_i\lambda_j$.
2. Si A et B sont positives et de rang 1, montrer que la matrice $A \circ B$ est positive.
3. De manière plus générale, si A et B sont positives, montrer que la matrice $A \circ B$ est positive.
4. Si A est positive, montrer que la matrice $E = (e^{a_{ij}})_{1\leq i,j\leq n}$ est positive.

Exercice 44. (factorisation de Cholesky et factorisation QR) Soit n un entier strictement positif et A une matrice réelle d'ordre n.

1. On suppose dans cette question que la matrice A est symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = {}^{\mathrm{t}}RR$.
2. On suppose dans cette question que la matrice A est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (Q, R), avec Q une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, tel que $A = QR$.

4 Espaces euclidiens

4.1 Produits scalaires

Exercice 45. Dire si les formes suivantes sont linéaires en la première variable, en la deuxième, bilinéaires, symétriques, positives, non dégénérées et si elles définissent un produit scalaire sur l'espace vectoriel considéré. Dans le dernier cas, écrire l'inégalité de Cauchy–Schwarz associée.

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $b(x, y) = 2\,x_1y_1 - 3\,x_2y_2 - x_3y_3$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $b(x, y) = 2\,x_1^2 + y_3^2 + 3\,x_1y_2 + 5\,x_2y_3$.
3. $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $b(x, y) = \sum_{i=1}^n x_iy_i$.
4. $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, $b(P, Q) = (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_0 + (\alpha_0 + 3\,\alpha_1)\beta_1 + 3\,\alpha_2\beta_2$, avec $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1\,X + \alpha_2\,X^2$ et $Q(X) = \beta_0 + \beta_1\,X + \beta_2\,X^2$.

Exercice 46. Soit α et β deux nombres réels et la forme b définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ b(x, y) = x_1y_1 + \beta\,x_1y_2 + \beta\,x_2y_1 + \alpha\,x_2y_2.$$

Donner, lorsqu'il y en a, les valeurs de α et β pour lesquelles b est

1. linéaire en la première variable,
2. linéaire en la deuxième variable,
3. symétrique,
4. positive,
5. non dégénérée,
6. un produit scalaire.

Exercice 47. (produit scalaire pour des matrices) Soit n un entier strictement positif. On pose

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}),\ \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^\mathsf{T} B).$$

1. Montrer que la forme ainsi définie est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour toutes matrices réelles symétriques A et B, on a

$$\big(\operatorname{tr}(AB)\big)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$

Exercice 48. (le cas complexe) Dire si les formes suivantes sont linéaires en la première variable, antilinéaires en la deuxième variable, sesquilinéaires, symétriques hermitiennes, positives, non dégénérées et si elles sont des produits scalaires. Dans le dernier cas, écrire l'inégalité de Cauchy–Schwarz associée.

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$, $b(x,y) = x_1\overline{y_1} - 2\mathrm{i}\, x_2\overline{y_2} + (1+\mathrm{i})\overline{x_2}y_1 + x_3\overline{y_2}$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$, $b(x,y) = x_1\overline{y_1} - 2\, x_2\overline{y_2} + \overline{y_3}x_3$.
3. $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$, $b(A,B) = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}A\overline{B})$.
4. $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, $\forall (f,g) \in E \times E$, $b(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 49. Montrer que chacune des formes suivantes définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel E considéré.

1. $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sur .
2. $E = \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\,\mathrm{d}t$, où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $]a,b[$.

Exercice 50. (condition nécessaire et suffisante pour avoir un produit scalaire) Soit E un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot\rangle$, a un vecteur unitaire de E et k un réel. On définit l'application b par

$$\forall (x,y) \in E \times E,\ b(x,y) = \langle x, y\rangle + k\,\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que b soit un produit scalaire sur E.

Exercice 51. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère deux vecteurs non nuls u et v d'un espace euclidien E de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot\rangle$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$, et la forme quadratique q définie par

$$\forall x \in E,\ q(x) = \langle u, v\rangle\langle x, x\rangle - \langle u, x\rangle\langle v, x\rangle.$$

1. Vérifier que la forme polaire b de q est donnée par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ b(x,y) = \langle u, v\rangle\langle x, y\rangle - \frac{1}{2}\left(\langle u, x\rangle\langle v, y\rangle + \langle u, y\rangle\langle v, x\rangle\right).$$

2. On suppose dans cette question que les vecteurs u et v sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un réel λ tel que $v = \lambda\, u$. Exprimer la forme q en fonction du vecteur u et du réel λ. En déduire le rang et la signature de q en fonction de la valeur de λ.

On suppose dans suite de l'exercice que les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires et l'on pose $v = \lambda\, u + w$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $w \in (\operatorname{Vect}\{u\})^\perp$, $w \neq 0_E$.

3. Écrire la forme polaire de q en fonction de u, w et λ.
4. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de E telle que $e_1 = \frac{u}{\|u\|}$ et $e_2 = \frac{w}{\|w\|}$. Exprimer la matrice de la forme polaire de q dans la base $\mathcal{B}$, en fonction de λ, $\|u\|$ et $\|w\|$.
5. Quels sont le rang et la signature de q lorsque $\lambda = 0$? Quel est le rang de q lorsque $\lambda \neq 0$?

Exercice 52. $\diamond$ (théorème de Fréchet–Jordan–von Neumann) Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E vérifiant l'*identité du parallélogramme* [1],

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

On se propose de démontrer que $\|\cdot\|$ est associée à un produit scalaire. Pour cela, on définit la forme f suivante :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de E^3, on a $f(x+z,y) + f(x-z,y) = 2\,f(x,y)$.
2. Montrer que pour tout (x,y) de E^2, on a $f(2\,x,y) = 2\,f(x,y)$.
3. Montrer que pour tout (x,y) de E^2 et tout rationnel r, on a $f(r\,x,y) = r\,f(x,y)$.
4. Montrer que pour tout (u,v,w) de E^3, $f(u,w) + f(v,w) = f(u+v,w)$.
5. Montrer que f est symétrique et définie positive.
6. Déduire des questions précédentes que f est bilinéaire et conclure.

1. En géométrie, la règle du parallélogramme dit que la somme des carrés des longueurs des quatre côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses deux diagonales.

4.2 Inégalité de Cauchy–Schwarz et applications

Exercice 53. Soit n un entier naturel non nul et $a_1, \dots, a_n$ des réels.

1. Montrer que l'on a
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2$$
et étudier les cas d'égalité.
2. On suppose maintenant que les réels $a_1, \dots, a_n$ sont strictement positifs et tels que $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n^2,$$
en étudiant les cas d'égalité.

Exercice 54. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Pour toute matrice colonne X, on suppose que $\|AX\|_2 \leq \|X\|_2$. Montrer que $\|{}^{\mathrm{t}}AX\|_2 \leq \|X\|_2$.

Exercice 55. Soit x, y et z trois réels tels que $2\,x^2 + y^2 + 5\,z^2 \leq 1$. Montrer que $(x+y+z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

Exercice 56. Soit f une fonction continue strictement positive sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite donnée par, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

Exercice 57. (nature d'une série) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2(\sqrt{2})^n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}}$.

Exercice 58. (calcul de borne inférieure) Soit $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R}^*)$. Déterminer $\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte ?

Exercice 59. $\diamond$ On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Existe-t-il un polynôme R tel que, $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, R\rangle = P(0)$?

4.3 Orthogonalité dans un espace euclidien

Exercice 60. (condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité) Soit E un espace vectoriel euclidien et x et y deux éléments de E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x + \lambda\, y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 61. Soit E un espace préhilbertien et A et B deux parties de E. Prouver les relations suivantes :

1. $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$.
2. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.
4. $\mathrm{Vect}(A) \subset A^{\perp\perp}$.
5. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $\mathrm{Vect}(A) = A^{\perp\perp}$.

Exercice 62. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E. Montrer que :

1. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
2. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Que peut-on dire quand E est de dimension finie ?

4.4 Bases orthonormales

Exercice 63. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, orthonormaliser la base $\{(1,0,1),(1,1,1),(-1,-1,0)\}$ selon le procédé de Gram–Schmidt.

Exercice 64. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, appliquer le procédé de Gram–Schmidt à la famille de vecteurs $\{(1,1,0),(0,\sqrt{2}/2,1),(\sqrt{2}/2,0,1)\}$.

Exercice 65. On munit $\mathbb{R}^4$ de la structure euclidienne canonique et on considère les vecteurs $u_1 = (0,0,0,1)$, $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (1,-3,0,2)$ et $u_4 = (3,-3,-2,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = \{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Orthonormaliser $\mathcal{B}$ selon le procédé de Gram–Schmidt.

Exercice 66. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ par rapport au produit scalaire

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 67. (une caractérisation des bases orthonormales) Soit E un espace préhilbertien et $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une famille de n vecteurs de E de norme unitaire, tels que l'on a

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2.$$

Montrer que E est de dimension n et que la famille $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est une base orthonormale de E.

Exercice 68. (caractérisation des similitudes) Soit E un espace euclidien, f un endomorphisme de E et λ un réel strictement positif. On dit que f est une *similitude* de rapport λ si

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \lambda\,\|x\|.$$

1. Question préliminaire : soit u et v des vecteurs de E tels que $u+v \perp u-v$. Montrer que $\|u\| = \|v\|$.
2. Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \lambda^2\,\langle x,y\rangle.$$

3. On souhaite prouver que f est une similitude si et seulement f est non nulle et conserve l'orthogonalité : pour tout couple (x,y) de E^2, si $x \perp y$, alors $f(x) \perp f(y)$.
   (a) Prouver le sens direct.
   (b) Soit $\{e_1,\ldots,e_n\}$ une base orthonormale de E. Montrer que, pour tout couple (i,j), $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.
   (c) Démontrer le sens réciproque.

Exercice 69. (généralités sur les polynômes orthogonaux) Soit $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive. Pour $E = \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t,$$

dont on admet qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ formée de polynômes deux à deux orthogonaux avec chaque P_n de degré n et de coefficient de plus haut degré égal à 1.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.
3. En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'existence de a_n et b_n tels que

$$P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}.$$

Exercice 70. $\diamond$ **(inégalité de Hadamard)** Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer que

$$\forall (e_1,\ldots,e_n) \in E^n,\ |\det(e_1,\ldots,e_n)| \leq \|e_1\|\ldots\|e_n\|,$$

en précisant les cas d'égalité.

4.5 Projections orthogonales

Exercice 71. Soit E un espace vectoriel euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si pour tout x de E, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 72. Soit E un espace vectoriel euclidien, p et q deux projecteurs orthogonaux définis sur E. Montrer l'équivalence entre :

1. $\mathrm{Im}\,(p) \subset \mathrm{Im}\,(q)$.
2. Pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$.

Exercice 73. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique. Soit D la droite de vecteur directeur $u = (1, 2, 0)$. Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale sur D.

Exercice 74. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique, on considère le sous-espace vectoriel F défini par

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\right\}.$$

1. Quelles sont les dimensions de F et $F^{\perp}$? Donner un système d'équations cartésiennes de $F^{\perp}$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Exercice 75. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $v_2 = (0, 3, 1, -1)$. On pose $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de $F^{\perp}$.

Exercice 76. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G.
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur G.
3. Déterminer la distance d'un élément x de E à G.

Exercice 77. Soit $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et p un endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera l'équation. Déterminer la distance du point de coordonnées $(1, 1, 1)$ à ce plan.

Exercice 78. (distance à un hyperplan affine) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance du point de coordonnées $(3, 4, 5)$ au plan d'équation $2x + y - z + 2 = 0$.

Exercice 79. (polynômes et projection) Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, muni du de la structure euclidienne canonique, et l'hyperplan $H = \{P \in E \,|\, P(1) = 0\}$ de E.

1. Déterminer une base orthonormale de H.
2. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 80. Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts. On pose

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k).$$

1. Vérifier que la forme $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormale de E.
3. Déterminer la distance d'un polynôme Q de E au sous-espace $H = \{P \in E \,|\, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$.

Exercice 81. Prouver l'existence et l'unicité des réels a et b tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x$ soit minimum. Les calculer.

Exercice 82. Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \pi]$ à valeurs réelles, muni du produit scalaire défini par

$$\forall (f, g) \in E^2,\ \langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} f(t) g(t) \,\mathrm{d}t.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto \cos(t)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. On pose
$$I(a,b) = \int_0^{\pi} (a\,\sin(t) + b\,\cos(t) - c)^2\,\mathrm{d}t.$$
Déterminer les réels a_0 et b_0 réalisant
$$I(a_0,b_0) = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b)$$
et calculer $I(a_0,b_0)$.

Exercice 83. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, muni du produit scalaire
$$\forall (P,Q)\in E^2,\ \langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que le sous-ensemble F de E formé des polynômes P tels que $P(1)=0$ est un plan vectoriel de E.
2. Déterminer l'orthogonal de F.
3. Déterminer la projection orthogonale du polynôme constant égal à 1 sur F.

Exercice 84. On considère $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne canonique et le plan P d'équations
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2-2\,x_3-x_4=0.\end{cases}$$

1. Déterminer les matrices de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P.
2. Calculer la distance d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^4$ à P.

Exercice 85. Soit un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels d'ordre n, muni du produit scalaire
$$\forall (A,B)\in M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R}),\ \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

1. Soit D_0 le sous-espace vectoriel des matrices scalaires :
$$D_0 = \{\lambda I_n \mid \lambda\in\mathbb{R}\}.$$
Déterminer ${D_0}^{\perp}$ et les projections orthogonales sur D_0 et ${D_0}^{\perp}$.
2. Faire de même pour le sous-espace D_1 des matrices diagonales.

Exercice 86. On considère l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$ des matrices à coefficients réels d'ordre 3, muni du produit scalaire canonique.

1. Déterminer l'orthogonal de $A_3(\mathbb{R})$, le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ à $A_3(\mathbb{R})$.

Exercice 87. $\diamond$ **(déterminant de Gram)** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p ($p>2$) sur $\mathbb{R}$, de produit scalaire noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pour toute famille de vecteurs $\{u_1,\dots,u_n\}$ donnée de E, on pose $G(u_1,\dots,u_n) = (\langle u_i,u_j\rangle)_{1\le i,j\le n}$ (*matrice de Gram*) et $\gamma(u_1,\dots,u_n) = \det(G(u_1,\dots,u_n))$ (*déterminant de Gram*).

1. Montrer que $\mathrm{rang}(G(u_1,\dots,u_n)) = \mathrm{rang}(\{u_1,\dots,u_n\})$.
2. Montrer que la famille $\{u_1,\dots,u_n\}$ est liée si et seulement si $\gamma(u_1,\dots,u_n)=0$ et qu'elle est libre si et seulement si $\gamma(u_1,\dots,u_n)>0$.
3. On suppose maintenant que $\{u_1,\dots,u_n\}$ est libre dans E (et donc que $n\le p$). On pose $F = \mathrm{Vect}(\{u_1,\dots,u_n\})$. Pour x dans E, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x) = \|x-p_F(x)\|$ la distance de x à F. Montrer que $d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x,u_1,\dots,u_n)}{\gamma(u_1,\dots,u_n)}}$.

Exercice 88. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique, déterminer la matrice de :
— la projection orthogonale sur la droite d'équations $3\,x_1 = 6\,x_2 = 2\,x_3$,
— la projection orthogonale sur la droite engendrée par le vecteur unitaire $\boldsymbol{u} = (a,b,c)$,
— la projection orthogonale sur le plan d'équation $a\,x_1+b\,x_2+c\,x_3=0$.

Exercice 89. (régression linéaire par la méthode des moindres carrés) Un médecin imagine que la taille des enfants doit, grossièrement, croître proportionnellement à leur masse. Il pense donc qu'il doit exister une relation mathématique du type

$$\text{taille en cm} \simeq a + b \times \text{masse en kg.}$$

Afin de calculer a et b, le médecin mesure 10 enfants volontaires agés de 6 ans et obtient le tableau suivant :

Enfant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taille (en cm)	121	123	108	118	111	109	114	103	110	115
Masse (en kg)	25	22	19	24	19	18	20	15	20	21

Le médecin, bien que peut-être reconnu en pédiatrie, est malheureusement un piètre mathématicien. Il a donc calculé, en désespoir de cause et sans trop comprendre pourquoi les différentes moyennes suivantes :

$$\overline{M} = \sum_{i=1}^{10} M_i/10 = 20,3 \text{ kg}, \quad \overline{T} = \sum_{i=1}^{10} T_i/10 = 113,2 \text{ cm},$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{10} \left(M_i - \overline{M}\right)^2/10 = 7,61 \text{ kg}^2, \quad R = \sum_{i=1}^{10} T_i M_i/10 = 2615,1 \text{ kg.cm}.$$

Aider le médecin en donnant (et en la justifiant) une expression de a et b en fonction des différentes moyennes $\overline{M}$, $\overline{T}$, R et σ. Calculer (de manière approchée) a et b et commenter, si possible, les résultats en utilisant les ratios (approchés) suivants :

$$\frac{R}{\sigma} = 344, \quad \frac{R\overline{M}}{\sigma} = 6976, \quad \frac{\overline{TM}}{\sigma} = 302, \quad \frac{\overline{TM}^2}{\sigma} = 6130.$$

Exercice 90. (méthode des moindres carrés) Soit n et p deux entiers naturels avec $p \leq n$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on identifie $\mathbb{R}^n$ avec $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ de rang p et $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ telle que
$$\|AX_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\| \mid X \in M_{p,1}(\mathbb{R})\}.$$
2. Montrer que X_0 est l'unique solution de
$$A^\mathsf{T} AX = A^\mathsf{T} B.$$
3. Application : déterminer
$$\inf\left\{(x+y-1)^2 + (x-y)^2 + (2x+y+2)^2 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

4.6 Endomorphismes des espaces euclidiens

4.6.1 Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 91. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E vérifiant, pour tout vecteru x de E, $\langle u(x), x\rangle = 0$. Que dire de u ?

Exercice 92. Soit A une matrice.

1. Montrer que ${}^\mathsf{t}AA$ est symétrique et positive.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}({}^\mathsf{t}AA)$, puis que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^\mathsf{t}AA)$.

Exercice 93. (matrice symétrique à puissance nulle) Soit A une matrice réelle symétrique. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Que dire de A ?

Exercice 94. (limite de suite) Soit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Soit $N = \lim_{n\to+\infty} A^n$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme associé à N.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes définie par $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = AX_n$. Prouver que cette suite converge et déterminer sa limite en fonction de u_0, v_0 et w_0.

Exercice 95. Soit E un espace vectoriel euclidien, u et v deux endomorphismes symétriques de E.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) \oplus^{\perp} \operatorname{Im}(u) = E$.
2. Montrer que $u \circ v$ est symétrique si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 96. Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de dimension n. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u, comptées avec leur multiplicité. Montrer que

$$\forall x \in E,\ \lambda_1 \|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Exercice 97. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a un vecteur unitaire de E et λ un réel.

1. Montrer que
$$f(x) = x + \lambda\langle x, a\rangle a$$
définit un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants.

Exercice 98. (symétrique entraîne linéaire) Soit E un espace euclidien et u une application de E dans E telle que

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

Montrer que u est linéaire.

Exercice 99. Soit E un espace euclidien de dimension n, u un endomorphisme symétrique de E, $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$ et $\{f_i\}_{i=1,\ldots,n}$ deux bases orthonormales de E.

1. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|u(f_i)\|^2.$$
2. Soit A une matrice réelle symétrique d'ordre n, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (comptées avec leur multiplicité). Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} {a_{ij}}^2 = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2.$$

Exercice 100. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $A^{\mathsf{T}}A$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont des réels positifs.

4.6.2 Endomorphismes orthogonaux et matrices orthogonales

Exercice 101. Caractériser les endomorphismes symétriques et orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien.

Exercice 102. Montrer que les matrices suivantes sont orthogonales et décrire géométriquement les isométries de $\mathbb{R}^3$ qu'elles représentent dans la base canonique :

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 103. Préciser la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ associés aux matrices suivantes dans la base canonique :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 104. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Montrer que ϕ est une rotation et déterminer son axe.

Exercice 105. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par le vecteur $u = e_1 - 2\,e_2$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 106. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & & & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \vdots & \vdots & & 0 & -\frac{n-2}{\sqrt{(n-2)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)n}} \end{pmatrix}$$

est orthogonale.

Exercice 107.

1. Trouver une matrice orthogonale $U \in O(2)$ qui vérifie $U\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\det(U) = 1$. Une telle matrice U est-elle unique ? Calculer $U\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.
2. Trouver une matrice orthogonale $U \in O(2)$ qui vérifie $U\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\det(U) = -1$. Une telle matrice U est-elle unique ?
3. Soit $v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et U une matrice orthogonale $U \in O(2)$ telle que $Uv = v$. Montrer que soit $U = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, soit $\det(U) = -1$.

Exercice 108. (matrice de Householder) Pour tout élément u non nul de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, on désigne par $H(u)$ la matrice

$$H(u) = I_n - 2\frac{UU^\intercal}{U^\intercal U}$$

où la matrice colonne U représente le vecteur u dans la base canonique.

1. Montrer que la matrice $H(u)$ est symétrique et orthogonale.
2. Soit Q une matrice orthogonale d'ordre n. Montrer que si $V = QU$ alors $H(v) = QH(u)Q^\intercal$, où v est l'élément de $\mathbb{R}^n$ représenté par V dans la base canonique.
3. On désigne par $\mathcal{D}$ la droite vectorielle engendrée par u et par $\mathcal{D}^\perp$ l'hyperplan orthogonal de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{D}$ est stable par $H(u)$ et que $H(u)W = W$ pour toute matrice colonne W représentant un élément w de $\mathcal{D}^\perp$.

Exercice 109. (valeurs propres réelles d'une isométrie) On considère l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et Q une matrice orthogonale d'ordre n.

1. On suppose que Q admet une valeur propre réelle λ et on considère un vecteur propre x associé à cette valeur propre. En calculant de deux façons différentes $\|Qx\|^2$, montrer que $\lambda^2\|x\|^2 = \|x\|^2$.
2. En déduire que $sp(Q) \cap \mathbb{R} \subset \{-1, 1\}$.
3. Donner un exemple de matrice orthogonale d'ordre 2 qui ne possède pas de valeur propre réelle.

Exercice 110. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On considère l'endomorphisme de E défini par $\phi(P)(X) = P(-X)$. Démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale.

Exercice 111. (sur les coefficients d'une matrice orthogonale) Soit $M = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in O(n)$.

1. Montrer que $|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}| \leq n$. Cette inégalité est-elle optimale ?
2. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \leq n^{3/2}$.
3. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{ij}| \geq n$.

Exercice 112. (matrices orthogonales triangulaires supérieures) Caractériser les matrices orthogonales qui sont triangulaires supérieures.

Exercice 113. (conditions nécessaires et suffisantes) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $S = a+b+c$ et $\sigma = ab+bc+ca$, et

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que M appartient à $O(3)$ si et seulement $\sigma = 0$ et $S = \pm 1$.
2. Démontrer que M appartient à $SO(3)$ si et seulement si $\sigma = 0$ et $S = 1$.

Exercice 114. $\diamond$ (exponentielle de matrice antisymétrique et groupe spécial orthogonal)

1. Montrer que, pour toute matrice réelle antisymétrique A, la matrice e^A est un élément de $SO(n)$.
2. Montrer que toute matrice de $SO(n)$ est de la forme e^A, où A est une matrice antisymétrique réelle.

5 Diagonalisation des matrices symétriques et applications

Exercice 115. Dans chacun des cas suivants, déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{\mathsf{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 116. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser la matrice A.
2. Soit q la forme quadratique de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Utiliser la question précédente pour trouver une base q-orthogonale et déterminer la signature de q.

Exercice 117. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Interpréter géométriquement l'endomorphisme qui dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est représentée par A.

Exercice 118. Soient a et b deux réels et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 119. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(A + A^{\mathsf{T}})^p$ est nulle si et seulement si A est antisymétrique.

Exercice 120. Pour $n \geq 2$, on considère $\mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne canonique et A une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les valeurs propres de $B = A^{\mathsf{T}} A$ sont strictement positives.
2. Montrer que si la famille $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale et que la famille $\{AX_1, \ldots, AX_n\}$ est orthogonale, alors les vecteurs X_i, $1 \leq i \leq n$, sont des vecteurs propres de la matrice B.

Exercice 121. Soient M et N deux matrices symétriques de taille d'ordre n, telles que la matrice M soit définie positive. Montrer qu'il existe une matrice inversible C telle que

$${}^{\mathsf{t}}CMC = I_n \text{ et } {}^{\mathsf{t}}CNC = D,$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Exercice 122. (racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit M une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une matrice R symétrique positive telle que $M = R^2$. Que dire de l'unicité d'une telle matrice ?

Exercice 123. (décomposition polaire) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer qu'il existe un unique couple de matrices (U, H), U étant orthogonale et H symétrique positive, tel que $A = UH$.

Exercice 124. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4\,x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) + 4\,x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 4\,x_3(t) \end{cases} .$$

3. Déterminer la solution de ce système vérifiant :

$$\begin{cases} x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = 2 \\ x_3(0) = -1 \end{cases} .$$

Exercice 125. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Donner l'expression de la forme quadratique associée à la matrice A.
2. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser la matrice A.
4. Déterminer une base orthonormée formée de vecteurs propres de la matrice A.
5. Expliciter e^A.
6. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^3$, résoudre le système d'équations différentielles

$$x'(t) = Ax(t),\ t > 0,\ x(0) = x_0.$$

Feuille de travaux dirigés

Exercices d'annales

Contrôle continu du 11 octobre 2017

Exercice 126. (questions de cours)

1. Soit N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. À quelle condition sont-elles dites équivalentes ?
2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
3. Énoncer les relations de récurrence définissant le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt.
   En pratique, on ne vérifie pas que la famille de vecteurs d'origine est une base, car le procédé est en mesure de « détecter » si cette famille est liée. Expliquer comment.

Exercice 127. (normes) Les questions numérotées sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$. Montrer que l'application qui à toute fonction g de E associe
$$\int_0^1 |g'(t)|\,\mathrm{d}t + |g(0)|,$$
   où la fonction g' est la dérivée de g, est une norme sur E.
2. Soit n un entier naturel et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
   (a) Rappeler quelle est la dimension de E et en donner une base.
   (b) En déduire qu'il existe une constante C strictement positive telle que
$$\forall P \in E,\ \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \geq C \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$
3. On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^0([0,1];\mathbb{R})$, muni de la norme définie par
$$\forall f \in E,\ N(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Soit a et b des réels positifs, u et v des réels strictement positifs. Établir que
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{u+v} \leq \frac{a}{u} + \frac{b}{v}.$$
   (b) Soit f et g deux fonctions de E, strictement positives sur $[0,1]$. En utilisant le résultat précédent, montrer que
$$N\left(\frac{1}{f+g}\right) \leq \frac{N(f)^2 N\left(\frac{1}{f}\right) + N(g)^2 N\left(\frac{1}{g}\right)}{\left(N(f)+N(g)\right)^2}.$$
   (c) En déduire que
$$N(f+g)N\left(\frac{1}{f+g}\right) \leq \max\left\{N(f)N\left(\frac{1}{f}\right), N(g)N\left(\frac{1}{g}\right)\right\}.$$

Exercice 128. (produits scalaires) Les questions numérotées sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit a et b deux réels et l'application f de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = x_1y_1 + (a+10)\,x_2y_2 - 3\,x_1y_2 + b\,x_2y_1,$$
   pour tous vecteurs $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. Déterminer l'ensemble des réels a et b pour lesquels f est un produit scalaire.

2. Soit n un entier naturel non nul et $\xi_1, \dots, \xi_{n+1}$, $n+1$ réels distincts. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n et l'application

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X],\ f(P,Q) = \sum_{i=1}^{n+1} P(\xi_i)Q(\xi_i).$$

   (a) Montrer que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Montrer que
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X],\ f(XP,Q) = f(P,XQ).$$

3. Soit l'application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)(y_i - y_j),$$

   pour tous vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

   (a) L'application f définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

   (b) Sa restriction au sous-espace vectoriel

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

   est-elle un produit scalaire ?

Partiel du 24 octobre 2017

Exercice 129. (questions de cours)

1. Donner la définition d'un espace euclidien et en donner un exemple.
2. Donner la définition d'une isométrie vectorielle entre deux espaces euclidiens.
3. Donner la définition du groupe orthogonal $O(n)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, en énonçant la propriété satisfaite par ses éléments.

Exercice 130. (vecteurs orthogonaux et bases orthonormées) Les questions numérotées sont indépendantes les unes des autres.

1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux et l'application f définie sur $E \times E$ par
$$\forall (P,Q) \in E \times E,\ f(P,Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0),$$
   où P' (respectivement P'') désigne la dérivée première (resp. seconde) du polynôme P.

   (a) Montrer que f est un produit scalaire sur E et déterminer la norme euclidienne qui lui est associée.

   (b) Déterminer si les couples de vecteurs ou de sous-espaces vectoriels suivants sont orthogonaux pour ce produit scalaire :

      i. $1 + X$ et $2 + X + 3\,X^2$,

      ii. $3 + 2\,X$ et X^2,

      iii. Vect($\{1 + X, 3 + 2\,X\}$) et Vect($\{2\,X^2\}$).

   (c) Montrer que la famille $\left\{1, X, \frac{1}{2}\,X^2\right\}$ forme une base de E orthonormée pour ce produit scalaire.

2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, muni du produit scalaire défini par
$$\forall (P,Q) \in E \times E,\ f(P,Q) = \int_0^{\pi} P(t)Q(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Pour tout entier n prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1,2,3,4\}$, calculer la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\pi} t^n \sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (b) Construire alors une base de E orthonormée pour f.

Exercice 131. (projections orthogonales) Les questions numérotées sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de la structure euclidienne usuelle et le sous-espace vectoriel F défini par le système d'équations
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$
   (a) Construire une base orthonormée de F.
   (b) Déterminer l'orthogonal de F.
   (c) Donner la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à deux, muni du produit scalaire
$$\forall (P, Q) \in E^2,\ f(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Construire une base de E orthonormée pour f à partir de la base canonique.
   (b) En déduire l'orthogonal du sous-espace vectoriel F engendré par la famille $\{1, X\}$.
   (c) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme $Q(X) = 1 + X + X^2$ sur F.
   (d) Calculer
$$\min_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(\sin(t) - a - b\,t - c\,t^2\right)^2\,\mathrm{d}t.$$
3. Soit p et q deux projections orthogonales dans un espace euclidien E.
   (a) Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que
$$F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow F_2^\perp \subset F_1^\perp.$$
   (b) Utiliser ce résultat pour prouver que $p \circ q = 0 \Leftrightarrow q \circ p = 0$.

Exercice 132. (matrice orthogonale) Soit la matrice
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A est orthogonale.
2. On va déterminer l'isométrie vectorielle f de $\mathbb{R}^3$ représentée par la matrice A dans la base canonique.
   (a) Calculer le déterminant de A et en déduire que la transformation est une rotation.
   (b) Déterminer l'axe de cette rotation en trouvant un vecteur directeur u tel que Vect($\{u\}$) = ker($f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$).
   (c) Déterminer les valeurs du réel θ solutions de tr(A) $= 1 + 2\cos(\theta)$.
   (d) On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Parmi les valeurs de θ trouvées à la question précédente, quelles sont celles telles que le signe de $\sin(\theta)$ est le même que celui du déterminant $\det_{\mathcal{B}}(u, e_1, f(e_1))$?

Contrôle continu du 27 novembre 2017

Exercice 133. (questions de cours)

1. Énoncer le théorème de réduction des formes quadratiques.
2. Énoncer le théorème portant sur la signature d'une forme quadratique, encore appelé « loi d'inertie de Sylvester ». Indiquer à quelle condition sur sa signature une forme quadratique est positive, définie positive et à quelle condition la forme bilinéaire symétrique qui lui est associée est non dégénérée.

Exercice 134. (une forme bilinéaire) On considère l'espace vectoriel $E = M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels et l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall (A, B) \in E \times E,\ b(A, B) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB)\right).$$

1. Montrer que l'application b est une forme bilinéaire symétrique.
2. Donner la matrice de b dans la base canonique $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ de E.
3. En déduire que la forme b est non dégénérée.

4. En vertu du théorème de Cayley–Hamilton, toute matrice à coefficients réels annule son polynôme caractéristique. En particulier, on a
$$\forall A \in E,\ A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)\, I_2 = 0_{M_2(\mathbb{R})}.$$
Montrer que la forme quadratique associée à b est $q(A) = \det(A)$. Cette forme est-elle définie ?
5. En déduire alors que
$$\forall (A, B) \in E \times E,\ \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(AB) = \det(A + B) - \det(A) - \det(B).$$

Exercice 135. (réduction de formes quadratiques) Effectuer une réduction de Gauss des formes quadratiques suivantes et donner leur rang et leur signature.

1. $\forall x \in \mathbb{R}^4$, $q(x) = {x_1}^2 + (4+\lambda)\, {x_2}^2 + (1+4\lambda)\, {x_3}^2 + \lambda\, {x_4}^2 + 4\, x_1x_2 + 2\, x_1x_3 + 4(1-\lambda)\, x_2x_3 + 2\lambda\, x_2x_4 + (1-4\lambda)x_3x_4$, en discutant selon la valeur du paramètre réel λ.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\, x_ix_j$ (on pourra écrire la matrice de q dans la base canonique pour s'aider).

Exercice 136. (transformation laissant invariante une forme quadratique) Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note b la forme polaire de q, c'est-à-dire l'unique forme bilinéaire symétrique associée à q.

1. Montrer que l'on a l'identité de polarisation suivante
$$\forall (x, y) \in E^2,\ b(x, y) = \frac{1}{2}\, (q(x) + q(y) - q(x - y))\,.$$

On suppose à présent que la forme q est telle que b est non dégénérée. On considère une application f de E dans E, bijective et telle que
$$\forall (x, y) \in E^2,\ q(f(x) - f(y)) = q(x - y).$$
On suppose tout d'abord que $f(0) = 0$.

2. Montrer que
$$\forall (x, y) \in E^2,\ b(f(x), f(y)) = b(x, y).$$
3. Montrer ensuite que
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (x, y, z) \in E^3,\ b(f(\lambda\, x + y), z) = \lambda\, b(f(x), z) + b(f(y), z).$$
4. En déduire que f est une application linéaire.

On suppose maintenant que $f(0) \neq 0$.

5. Montrer que f est une application affine, c'est-à-dire qu'il existe un élément α de E et une application linéaire g de E dans E bijective tels que
$$\forall x \in E,\ f(x) = g(x) + \alpha.$$