Université Paris-Dauphine
Licence MIE 2ème année
Analyse 3

Partiel, lundi 22 octobre 2018.

Corrigé.

Questions de cours. Le lecteur est bien sûr renvoyé au cours.

Exercice 1. *Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ aux suites definies ci-dessous :*

- 1. $u_n = n\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et 2. $v_n = n\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) - 1$.

  On pouvait faire u_n et v_n d'un seul coup. En effet, on a
  $$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
  Puis on utilise le DL de sinus en 0 : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + o(x^2)$, pour déduire que
  $$\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
  Il suit que
  $$n\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
  On déduit immédiatement que $u_n \sim 1$ et $v_n \sim -\frac{1}{2n}$.

- 3. $w_n = \exp\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) - e$. On factorise par e de sorte que
  $$w_n = e\left(\exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) - 1\right).$$
  On a $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En utilisant le DL à l'ordre 1 de l'exponentielle $\exp(x) = 1 + x + o(x)$, on déduit
  $$w_n = e\left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = -\frac{e}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
  Donc $w_n \sim -\frac{e}{2n^2}$.

- 4. $x_n = \left(1 + \dfrac{\ln(2)}{n}\right)^n - 2$. On factorise par 2 et on écrit

$$x_n = 2\left(\exp\left[n\ln\left(1+\frac{\ln(2)}{n}\right) - \ln(2)\right] - 1\right).$$

On fait un DL du logarithme à l'ordre 2 :

$$\ln\left(1+\frac{\ln(2)}{n}\right) = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{\ln^2(2)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

puis

$$n\ln\left(1+\frac{\ln(2)}{n}\right) - \ln(2) = -\frac{\ln^2(2)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Un DL à l'ordre 1 d'exponentielle $\exp(x) = 1 + x + o(x)$ donne alors

$$\exp\left[n\ln\left(1+\frac{\ln(2)}{n}\right) - \ln(2)\right] = 1 - \frac{\ln^2(2)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(-\frac{\ln^2(2)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \frac{\ln^2(2)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Il suit que $x_n = -\frac{2\ln^2(2)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $x_n \sim -\frac{2\ln^2(2)}{2n}$.

Exercice 2. *Pour chaque terme général suivant, indiquer si la série correspondante est absolument convergente, semi-convergente ou divergente. On discutera selon les paramètres.*

- 1. $u_n = \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) - a - \dfrac{b}{n}$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

On utilise le DL à l'ordre 4 de cosinus : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$. Donc

$$u_n = (1-a) - \frac{b + \frac{1}{2}}{n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Donc si $a \neq 1$, alors $u_n \sim (1-a)$ et la série diverge par théorème d'équivalence pour les séries positives (puisque $1-a$ a un signe fixe).
Si $a = 1$ mais $b \neq -\frac{1}{2}$, alors $u_n \sim -\frac{b+\frac{1}{2}}{n}$ et la série diverge par théorème d'équivalence pour les séries positives (puisque $-\frac{b+\frac{1}{2}}{n}$ a un signe fixe).
Si enfin $a = 1$ et $b = -\frac{1}{2}$, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, donc $n^{3/2}|u_n|$ tend vers 0. Donc par critère en n^α la série positive de terme général $|u_n|$ est convergente, et la série de terme général u_n est absolument convergente.

- 2. $v_n = \displaystyle\int_0^{1/n} \ln(1+x)\,dx$.

On commence par observer que v_n est positif, puisque le logarithme l'est sur $[1, +\infty[$. Ensuite on utilise $\ln(1+x) \leq x$, et donc

$$v_n \leq \int_0^{1/n} x\,dx = \frac{1}{2n^2}.$$

Par théorème de comparaison pour les séries positives, la série de terme général v_n converge.

- 3. $x_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ où $\alpha > 0$.

  Comme $\sin(-x) = -x$, on voit que pour tout entier n

$$x_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

  Puis comme sinus est croissante sur $[0, \pi/2]$ et que la suite de terme général $1/n^\alpha$ est décroissante à valeurs dans $[0, 1]$, la suite de terme général $\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ décroît, vers 0 bien sûr (la limite est évidente). Donc par critère spécial des séries alternées, la série de terme général x_n converge.
  Ensuite, on a clairement

$$|x_n| = \sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}.$$

  Par théorème de comparaison pour les séries positives, la série de terme général x_n est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 3. *Soit* $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. *Montrer que la série de terme général* $\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$ *converge.*

   On commence par remarquer que l'on a pour tout n que $\frac{a}{2^n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) > 0$, et on peut passer au logarithme sans problème d'existence.
   Ensuite on a par développement du cosinus

$$\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = 1 - \frac{a^2}{2^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

   puis par celui du logarithme

$$\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) = -\frac{a^2}{2^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right) + o\left(-\frac{a^2}{2^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right)\right) = -\frac{a^2}{2^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right).$$

   Donc par théorème de comparaison pour les séries positives (négatives en l'occurrence), la série considérée converge.

2. *Montrer que pour tout* $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *et tout entier* $n \geq 0$, *on a*

$$\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}.$$

   Pour a dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, cela équivaut à

$$2\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right),$$

   ce qui correspond à la formule $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ pour $x = \frac{a}{2^n}$.

3. *En déduire la somme de la série ci-dessus.*

En calculant les premières valeurs, on peut deviner la formule générale pour la somme partielle. Puis une récurrence élémentaire montre que pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2^{N+1}\sin\left(\frac{a}{2^N}\right)}\right)$$

Comme lorsque N tend vers $+\infty$, on a $\sin\left(\frac{a}{2^N}\right) \sim \frac{a}{2^N}$, on en déduit facilement que

$$\sum_{n=0}^{N} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right) \longrightarrow \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right).$$

lorsque N tend vers $+\infty$. La somme de la série est donc $\ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right)$.

Exercice 4. *Étudier la convergence des intégrales suivantes, en fonction du paramètre quand il y en a un :*

- 1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + \cos(t)}\, dt.$

  On commence par remarquer que l'application $t \mapsto e^t + \cos(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (sa dérivée $e^t + \sin(t)$ est positive puisque $e^t \geq 1$ sur $\mathbb{R}^+$). Elle est donc supérieure ou égale à sa valeur en zéro, c'est-à-dire 2. Donc la seule singularité se trouve en $+\infty$. Comme le cosinus est borné, on a $e^t + \cos(t) \underset{+\infty}{\sim} e^t$, puis

  $$\frac{1}{e^t + \cos(t)} \underset{+\infty}{\sim} e^{-t}.$$

  L'intégrale est donc convergente par théorème d'équivalence pour les intégrales positives.

- 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha + y^\beta}$ où α et $\beta \in \mathbb{R}$ sont fixés.

  Séparons quelques cas. Si $\alpha = \beta$, on a alors $\frac{1}{y^\alpha + y^\beta} = \frac{1}{2y^\alpha}$ qui diverge toujours soit en 0, soit en $+\infty$ (et même des deux côtés pour $\alpha = 1$).
  Considérons maintenant le cas $\alpha < \beta$. Dans ce cas on a

  $$y^\alpha + y^\beta \underset{0}{\sim} y^\alpha \quad \text{et} \quad y^\alpha + y^\beta \underset{+\infty}{\sim} y^\beta,$$

  donc

  $$\frac{1}{y^\alpha + y^\beta} \underset{0}{\sim} y^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{1}{y^\alpha + y^\beta} \underset{+\infty}{\sim} y^{-\beta}.$$

  Par théorème d'équivalence pour les intégrales positives, l'intégrale converge donc si et seulement si $\alpha < 1$ et $\beta > 1$.

Le cas $\beta < \alpha$ est le même en échangeant les noms de α et β. On trouve donc au final que l'intégrale converge si et seulement si

$$\min(\alpha,\beta) < 1 < \max(\alpha,\beta).$$

- 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-\sqrt{\ln(z)})\,dz.$

  Il s'agit clairement d'un intégrande positif, et la seule singularité se trouve en $+\infty$. On remarque que pour $z \geq e$, on a $\ln(z) \geq 1$, donc $\ln(z) \geq \sqrt{\ln(z)}$, donc

$$\frac{1}{z} = \exp(-\ln(z)) \leq \exp(-\sqrt{\ln(z)}).$$

  On conclut par théorème de comparaison pour les intégrales positives que l'intégrale

$$\int_e^{+\infty} \exp(-\sqrt{\ln(z)})\,dz$$

  diverge et par conséquent celle qui est demandée aussi.

- 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}\,dx.$

  Là encore l'intégrande est continu en 0 et la question de la convergence se pose uniquement en $+\infty$. On écrit alors

$$(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}} = \exp\left(\sqrt{x}\ln\left[\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\right)\right]\right).$$

  Maintenant,

$$\ln\left[\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\right)\right] = \frac{1}{3}\ln(x) + \ln\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\right).$$

  Or

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

  donc

$$\ln\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{3x}(1+o(1))\right) = -\ln(3x) - \ln(1+o(1)) = -\ln(x) - \ln(3) + o(1).$$

  On déduit que

$$\ln\left[\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\right)\right] = -\frac{2\ln(x)}{3} - \ln(3) + o(1).$$

Donc
$$(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}} = \exp\left(-\frac{2\sqrt{x}\ln(x)}{3} - \ln(3)\sqrt{x} + o(\sqrt{x})\right).$$
Donc
$$x^2(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}} = \exp\left(-\frac{2\sqrt{x}\ln(x)}{3} - \ln(3)\sqrt{x} + 2\ln(x) + o(\sqrt{x})\right).$$
Comme
$$-\frac{2\sqrt{x}\ln(x)}{3} - \ln(3)\sqrt{x} + 2\ln(x) + o(\sqrt{x}) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2\sqrt{x}\ln(x)}{3},$$
ces deux fonctions tendent vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et donc leur exponentielle tend vers 0. Donc
$$x^2(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}} \longrightarrow 0 \text{ lorsque } x \to +\infty.$$
Par critère en x^α, l'intégrale converge.

Exercice 5. *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On définit la suite u de terme général donné par*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_n^{n+1} f.$$

1. *Montrer que si $\int_0^{+\infty} f$ converge, alors la série de terme général u_n converge.*

Dire que l'intégrale converge, c'est dire que la fonction $X \mapsto \int_0^X f$ a une limite ℓ quand X tend vers $+\infty$. Introduisons la suite (x_n) définie par $x_n = n+1$ pour tout n. Alors clairement $x_n \to +\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc par composition des limites
$$\int_0^{x_n} f \longrightarrow \ell.$$
Or bien sûr
$$\int_0^{x_n} f = \int_0^{n+1} f = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Cette somme partielle à droite converge, c'est exactement ce qu'il fallait démontrer.

2. *Montrer que si f est positive et que la série de terme général u_n converge, alors $\int_0^{+\infty} f$ converge.*

Comme f est positive, pour montrer que la fonction $X \mapsto \int_0^X f$ a une limite quand X tend vers $+\infty$, il suffit de montrer qu'elle est majorée puisqu'elle est croissante. Or pour $X \in \mathbb{R}^+$, on a
$$\int_0^X f \leq \int_0^{E(X)+1} f = \sum_{k=0}^{E(X)} \int_k^{k+1} f = \sum_{k=0}^{E(X)} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k,$$
puisque les u_k sont positifs et que leur série converge. D'où le résultat.

3. *Montrer par un contre-exemple que cela n'est pas vrai en général si on ne suppose pas que f est positive.*

Prenons $f(x) = \cos(\pi x)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_n^{n+1} f(x)\, dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_n^{n+1} = 0.$$

Donc (u_n) est la suite nulle, la série de terme général u_n est donc convergente. Mais si l'intégrale convergeait, on aurait donc

$$\int_0^X f \longrightarrow \int_0^{+\infty} f \text{ lorsque } x \to +\infty,$$

donc

$$\left(\int_0^n f\right) - \left(\int_0^{n+\frac{1}{2}} f\right) \longrightarrow \left(\int_0^{+\infty} f\right) - \left(\int_0^{+\infty} f\right) = 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

On aurait donc

$$\int_n^{n+\frac{1}{2}} f(x)\, dx \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Or

$$\int_n^{n+\frac{1}{2}} f(x)\, dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\right]_n^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{\pi},$$

qui ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. L'intégrale ne converge donc pas.

4. *On suppose dans cette question que f tend vers 0 en l'infini. Montrer que dans ce cas*

$$\textit{l'intégrale } \int_0^{+\infty} f \textit{ converge} \iff \textit{la série de terme général } u_n \textit{ converge.}$$

L'implication de gauche à droite a déjà été montrée et ne nécessite pas l'hypothèse que f tend vers 0 en l'infini. Montrons l'autre sens, et supposons que la série de terme général u_n converge, et notons

$$\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, on peut fixer un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, on ait

$$\left|\ell - \sum_{k=0}^{n} u_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par ailleurs comme f tend vers 0 en $+\infty$, on peut fixer un $K \in \mathbb{R}^+$ tel que pour $x \geq K$, on ait

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $M = \max(K+1, N+2)$. Alors pour $X \geq M$ on a

$$\begin{aligned}
\left|\ell - \int_0^X f\right| &= \left|\ell - \int_0^{E(X)} f - \int_{E(X)}^X f\right| \\
&\leq \left|\ell - \int_0^{E(X)} f\right| + \left|\int_{E(X)}^X f\right| \\
&\leq \left|\ell - \sum_{k=0}^{E(X)-1} u_k\right| + \int_{E(X)}^X |f|\,.
\end{aligned}$$

Comme $X \geq M \geq N+2$, on a $E(X) \geq N+1$ et donc $E(X) - 1 \geq N$; il suit que le premier terme est inférieur à $\varepsilon/2$. Comme $X \geq M \geq K+1$, on a $E(X) \geq K$, et donc on a $|f(x)| \leq \varepsilon/2$ sur l'intervalle $[E(X), X]$. Donc le second terme est lui aussi inférieur à $\varepsilon/2$.

Au final on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, on pouvait trouver un $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour $X \geq M$:

$$\left|\ell - \int_0^X f\right| \leq \varepsilon.$$

L'intégrale converge donc vers ℓ lorsque X tend vers $+\infty$, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge, ce qu'il fallait démontrer.