Université Paris-Dauphine
Licence MIE 2ème année
Analyse 3

Partiel, lundi 22 octobre 2018.

Durée : 2 heures.

Tous *les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse, avec des justifications complètes. Lorsque des résultats du cours seront invoqués, ils devront être clairement énoncés.*

Questions de cours.

1. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
2. Montrer que si deux suites positives u et v sont telles que pour tout n, $u_n \leq v_n$, alors la convergence de la série de terme général v_n implique celle de de la série de terme général u_n.

Exercice 1. Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ aux suites définies ci-dessous :

$$1.\ u_n = n \sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right), \qquad 2.\ v_n = n \sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - 1,$$
$$3.\ w_n = \exp\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) - e, \qquad 4.\ x_n = \left(1+\frac{\ln(2)}{n}\right)^n - 2.$$

Exercice 2. Pour chaque terme général suivant, indiquer si la série correspondante est absolument convergente, semi-convergente ou divergente. On discutera selon les paramètres.

$$1.\ u_n = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - a - \frac{b}{n} \text{ où } a, b \in \mathbb{R}, \qquad 2.\ v_n = \int_0^{1/n} \ln(1+x)\,dx$$
$$3.\ x_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \text{ où } \alpha > 0.$$

Exercice 3. Soit $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que la série de terme général $\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$ converge.
2. Montrer que pour tout $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et tout entier $n \geq 0$, on a
$$\cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}.$$
3. En déduire la somme de la série ci-dessus.

Exercice 4. Étudier la convergence des intégrales suivantes, en fonction des paramètres quand il y en a :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+\cos(t)}\,dt,$ 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^\alpha+y^\beta},$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-\sqrt{\ln(z)})\,dz,$ 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}\,dx.$

Exercice 5. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On définit la suite u de terme général donné par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_n^{n+1} f.$$

1. Montrer que si $\int_0^{+\infty} f$ converge, alors la série de terme général u_n converge.
2. Montrer que si f est positive et que la série de terme général u_n converge, alors $\int_0^{+\infty} f$ converge.
3. Montrer par un contre-exemple que cela n'est pas vrai en général si on ne suppose pas que f est positive.
4. On suppose dans cette question que f tend vers 0 en l'infini. Montrer que dans ce cas

$$\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} f \text{ converge} \iff \text{la série de terme général } u_n \text{ converge.}$$

⋆

Barême **<u>indicatif</u>** : Cours : 2 points, Exercice 1 : 4 points, Exercice 2 : 3 points,
Exercice 3 : 3 points, Exercice 4 : 4 points, Exercice 5 : 4 points.