

Rappels : Équivalents et développements limités

Exercice 1. Déterminer un équivalent simple des suites suivantes :

$$(i) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\ln(n+1)}{n} - \frac{\ln(n)}{n+1}, \quad (ii) \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n,$$

$$(iii) \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln(n)}, \quad (iv) \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = n^{\frac{1}{1+n^2}} - 1.$$

Exercice 2. Déterminer un développement au second ordre des suites suivantes :

$$(i) \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n \ln(n)},$$

$$(ii) \forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 \right)^\alpha, \text{ où } \alpha > 0,$$

$$(iii) \forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\sin(\frac{1}{n})}.$$

Exercice 3. (Extrait du CC1 2017) Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ aux suites définies ci-dessous :

$$1. u_n = \ln(1 + (1 + n^{-2})^{2/3}), \quad 2. v_n = \frac{\cos(\frac{1}{n})}{n \sin(\frac{1}{n}) + \ln(1 + n)},$$

$$3. w_n = \frac{e^{\frac{2}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{\sin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}, \quad 4. x_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{1}{2n}.$$

Exercice 4. (Extrait du partiel 2017) Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ aux suites définies ci-dessous, en fonction du paramètre quand il y en a un :

$$1. u_n = \sqrt{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{1}{2n}, \quad 2. v_n = n^3 \sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right) - n^2,$$

$$3. x_n = \frac{\ln(1 + \alpha^n)}{\sqrt{1 + n \ln n + \cos(n)}} \text{ où } \alpha > 0 \text{ est fixé.}$$