
RÉVISIONS (FEUILLE 0) : CONTINUITÉ D'APPLICATIONS

1 Applications linéaires continues

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés **de dimension finie** et $f : E \mapsto F$ une application linéaire. Montrer que f est continue. Les *deux* espaces E et F doivent-ils être simultanément de dimension finie pour assurer cette propriété ?

Exercice 2. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -e.v.n. et f une forme linéaire sur E . Montrer que f est continue si et seulement si $\text{Ker}(f)$ est fermé.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que pour $f \in E$ on a

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_E) \rightarrow (F, N_F)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $T : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $T : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (F, \|\cdot\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k \geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k \geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P'$.

Exercice 5. (*Inégalité de Hardy*)

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < +\infty \right\}$. On note g la moyenne de f entre 0 et x ,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ si } x \neq 0, \quad g(0) = f(0).$$

1. Montrer que g est continue sur \mathbb{R} et que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x g(t)^2 dt = 2 \int_0^x f(t)g(t) dt - xg(x)^2.$$

2. En déduire que, pour $x \geq 0$,

$$\left(\int_0^x g(t)^2 dt\right)^{1/2} \leq 2 \left(\int_0^x f(t)^2 dt\right)^{1/2}.$$

3. L'application de E dans lui même qui a f associe g est-elle bien définie ? Est-elle continue ?
4. Quelle est la norme de $f \mapsto g$? On pourra considérer $f_a(x) = \min(1, |x|^{-a})$, pour $a > \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E . Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Démontrer que ϕ est continue.
2. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0, 1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
3. On pose $\|\phi\| = \sup_{f \neq 0 \in E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $\|\phi\|$.

Exercice 7. Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire.

1. Soit $a \in E$. Démontrer que f_a définie par $f_a(x) = \langle x, a \rangle$ est continue.
2. En déduire que l'orthogonal de toute partie de E est un fermé de E .

Exercice 8. Soit E l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ converge. On pose, pour $a = (a_n) \in E$,

$$\|a\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E .
2. On pose $F = \{a \in E; \sum_{n \geq 1} a_n = 1\}$. F est-il ouvert? fermé? borné?

2 Continuité de fonctions de plusieurs variables

Exercice 9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -e.v.n.. Montrer que $x \mapsto \|x\|$ est continue.

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles continues sur \mathbb{R}^2 ?

$$f_1(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \quad f_3(x, y) = -4xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

$$f_4(x, y) = \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_5(x, y) = \frac{x - \sin(x)}{x^2+y^2}, \quad f_6(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^4},$$

$$f_7(x, y) = (x^2+y^2)^a \sin\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f_i(0, 0) = 0$ pour $i = 1, \dots, 7$.

Exercice 11. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue en $(0, 0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 12 (Partiel L2 2018). La fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par la formule ci-dessous est-elle continue en $(0, 0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+|xy|) - |xy|}{(x-y)^2 + x^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$ par $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$.

Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur la diagonale $x = y$.