Université Paris-Dauphine
Année universitaire 2018-2019
Analyse 3, Licence MIE 2ème année

Chapitres 1 et 2 : Suites de Cauchy et séries numériques

Exercice 1. Parmis les suites suivantes, vérifier lesquelles sont des suites de Cauchy en utilisant la définition :

$$(i)\ a_n = 1/n^2, \quad (ii)\ b_n = (-1)^n, \quad (iii)\ c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad (iv)\ d_n = \ln n\ .$$

Exercice 2. (a) Soit (r_n) une suite de nombres réels telle que $|r_{n+1} - r_n| \leq \lambda^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où λ est un réel strictement compris entre 0 et 1. Montrer que la suite (r_n) est de Cauchy.

(b) Soit (r_n) la suite définie par récurrence par $r_0 = 2$ et $r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$, $n \geq 0$. Montrer que $(r_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. On pourra auparavant montrer que (r_n) est à valeurs dans $[\frac{3}{2}, 2]$.

Exercice 3. (a) Soit (x_n) une suite d'éléments de $[0, 1[$, et f une application de $[0, 1[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que (x_n) est une suite de Cauchy et que f est uniformément continue. Montrer que la suite $(f(x_n))$ est de Cauchy.

(b) Montrer par un contre-exemple que cette propriété n'est en général pas vraie lorsque l'on suppose f seulement continue.

(c) Soit (x_n) et (y_n) deux suites d'éléments de $[0, 1[$, qui convergent vers 1. On suppose de nouveau que $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ est uniformément continue. Expliquer pourquoi les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ convergent dans $\mathbb{R}$.

On introduit la suite (z_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{2n} = x_n \quad \text{et} \quad z_{2n+1} = y_n.$$

Montrer que la suite (z_n) est de Cauchy. En déduire que les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ont la même limite.

Exercice 4. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Indication. On pourra calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3)$ *de deux façons différentes.*

Exercice 5. (Paradoxe de Zénon.) Zénon d'Élée a formulé au Vème siècle avant J.-C. le célèbre paradoxe suivant. Supposons qu'Achille fasse la course avec une tortue. Les deux concurrents ont des vitesses constantes notées V pour Achille et v pour la tortue. Bien sûr, on a $0 < v < V$ et Achille laisse une avance à la tortue. Ainsi, au départ de la course, Achille occupe la position $u_0 = 0$ et la tortue occupe une position $v_0 = d > 0$. Au bout d'un certain temps, au temps t_1, Achille a parcouru cette distance d. Mais pendant cette période de temps, la tortue a également progressé. Ainsi, au temps t_1, Achille occupe donc la position $u_1 = d$ et la tortue une position $v_1 > d$. À l'étape suivante, Achille parcoure la nouvelle distance $v_1 - d$ le séparant de la tortue à la fin de l'étape 1, et ainsi de suite. Ainsi, à chaque étape, la distance qu'il reste à parcourir pour rejoindre la position de la tortue est strictement positive et le processus est sans fin. Pourtant Achille finit par rattraper la tortue...

1. Oublions le paradoxe de Zénon pour un moment : en combien de temps Achille rattrape-t-il la tortue et quelle distance aura-t-il parcourue ?

2. Revenons à présent au paradoxe de Zénon. On appelle u_n et v_n la position d'Achille et de la tortue à la fin de la n-ième étape, respectivement. Justifier que
$$u_{n+1} = v_n \quad ; \quad v_{n+1} = v_n + \frac{v}{V}(v_n - u_n).$$
Combien de temps dure la n-ième étape ? Appelons τ_n cette durée. Montrer que les séries de terme général u_n, v_n et τ_n convergent. Quelle est leur somme ? Conclure.

3. Question subsidiaire : en combien d'étapes Achille réduit-il l'écart au milième ?

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note
$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad v_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}, \quad w_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{2}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha}.$$
1. Pour quelles valeurs de α la série de terme général u_n est-elle convergente ?

2. Pour quelles valeurs de α la série de terme général v_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

3. Pour quelles valeurs de α la série de terme général w_n est-elle convergente ? Dans ce cas, calculer sa somme.

Exercice 7. Déterminer la nature des séries de terme général:

(i) $u_n = \frac{1+\ln(n)}{n^2}$, (ii) $v_n = \frac{2^n+5}{3^n+11}$, (iii) $w_n = e^{-\sqrt{n}}$, (iv) $y_n = \frac{(n+1)^4}{n!+1}$,

(v) $a_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{n})^n$, (vi) $b_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n}$, (vii) $c_n = n^2 \sin(\frac{1}{2^n})$,

(viii) $d_n = (n^6+3)^a - (n^2+2)^{3a}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit f une fonction positive, décroissante et continue sur $[1, +\infty[$. On note: $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)dt$.

1. Montrer que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2. En déduire que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3. Applications.
a. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{(\ln(n+1))^\alpha}{n+1}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de α la série de terme général u_n est-elle convergente ?
b. Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Remarque. La limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la constante d'Euler $\gamma = 0,57721566\ldots$.

Exercice 9. Discuter selon les valeurs $p, q \in \mathbb{R}$ la convergence de la Série de Bertrand $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}$.

Exercice 10. Déterminer la nature des séries de terme général:
$$(i)\ u_n = \frac{(-1)^n}{2n + (-1)^n}, \ (ii) v_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \ln(n)}, \ (iii)\ w_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{n}).$$

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

1. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0.$$

Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors, la série de terme général u_n^2 est convergente.

2. Ce résultat demeure-t-il vrai si les réels u_n ne sont plus supposés positifs ?

Indication. On pourra rechercher un contre-exemple sous la forme d'une série alternée.

Exercice 12. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3}{(6n+1)(6n+4)}$.

1. Montrer que les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes.

2. Calculer $u_{2n} + u_{2n+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Exercice 13. (Critère spécial des séries alternées, preuve alternative). Soit (x_n) une suite décroissante et convergeant vers 0. On souhaite montrer que la série de terme général $(-1)^n x_n$ converge. On introduit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n x_n.$$

1. Montrer que pour tout n, $x_n \geq 0$.

2. Montrer que (S_{2n}) est une suite décroissante, et que (S_{2n+1}) est une suite croissante. En déduire que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

3. Conclure.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On note

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ \text{ et } \ v_n = \frac{u_n}{S_n}.$$

1. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente, alors la série de terme général v_n est convergente.

2. Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=1}^{n} (1 - v_k) = \frac{u_0}{S_n}.$$

3. On suppose que la série de terme général v_n est convergente.
a. Quelle est la nature de la série de terme général $\ln(1 - v_n)$?
b. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

Exercice 15*. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ diverge. Montrer que pour $\alpha < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n^\alpha}$ diverge aussi.

*Difficile