FEUILLE 11 : OPTIMISATION SOUS CONTRAINTES

Exercice 1. *Un lemme Afgoustidien.*

Soit E un espace vectoriel.

1. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Montrer que si $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ alors f et g sont proportionnelles.
2. Soit $g, f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Montrer que si $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i \subset \text{Ker } g$ alors g est combinaison linéaire des f_i .

Exercice 2. *Les conditions d'ordre 2.*

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $a \in M$. On suppose que localement autour de a , M est donnée implicitement par les contraintes $g_i = 0$, avec $0 \leq i \leq p$. On se donne $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que si a est un minimum local de f et si les λ_i sont alors les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte g_i , alors le gradient en a de $f - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i$ est nul et la Hessienne en a de $f - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i$ est positive sur $T_a M$.
2. Montrer que si a est un point critique de f sur M et si la Hessienne de $f - \sum_{i=1}^p \lambda_i g_i$ est définie positive sur $T_a M$, ou les λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte g_i , alors a est un minimum local de f sur M .

Exercice 3. Pour chacune des fonctions f suivantes, rechercher les extrema sur $\mathbb{R}^2$ et esquisser les courbes de niveau de la surface d'équation $z = f(x, y)$:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = x^2 - y^2$,
2. $f(x, y) = x^2 + y^4$,
3. $f(x, y) = x^2 + y^3$,
4. $f(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$.

Exercice 4. Déterminer si le problème suivant possède des solutions :

$$\inf \{ (x^2 - y^2)^2 - x^2 - y : 0 \leq y \leq |x|/2 \}.$$

Exercice 5. Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x, y) = xy, \quad g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Déterminer

1. les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$, puis sous la contrainte $g(x, y) = \frac{2}{3}$,
2. les extrema de g sur son domaine de définition, puis sous la contrainte $f(x, y) = 9$.

Exercice 6. Dans les cas suivants, en traçant les courbes de niveau de f et la contrainte $g(x, y) = 0$, trouver graphiquement les points où f atteint un extremum local sous la contrainte $g(x, y) = 0$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y, & g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1, \\ f(x, y) &= xy, & g(x, y) &= x^2 + y^2 - x - y, \\ f(x, y) &= \ln(x + y), & g(x, y) &= x^2 + y^2 - 2. \end{aligned}$$

Justifier ensuite analytiquement et préciser la nature des extrema locaux.

Exercice 7. Maximiser la fonction xyz sur la courbe obtenue par intersection de la sphère $S^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan $x + y + z = 1$.

Exercice 8. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (muni de la norme euclidienne usuelle), résoudre :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+^n} \|x - x_0\|.$$

Exercice 9. Minimiser sur $\mathbb{R}^n$ la fonction

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

sous les contraintes $\forall i \in [1, n], x_i^2 \leq 1$.

Exercice 10. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1 qui minimisent la norme euclidienne ?

Exercice 11 (Un peu de microéconomie (mais pas trop quand même)).

La théorie microéconomique du consommateur suppose qu'un agent avec un budget $b > 0$, étant donné des prix (strictement positifs) $p_1, \dots, p_n$ des différents biens de consommation, choisit son panier de consommation en résolvant

$$\sup \{U(c_1, \dots, c_n) : c_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n p_i c_i = b\}, \quad (1)$$

avec U sa fonction d'utilité. Résoudre rigoureusement (cette fois-ci ... !) le problème lorsque U est ...

1. une fonction de Cobb-Douglas :

$$U(c_1, \dots, c_n) = c_1^{\alpha_1} \dots c_n^{\alpha_n}$$

avec $\alpha_i \geq 0$ et $\sum \alpha_i \leq 1$.

- 2.

$$U(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i^{\beta_i}$$

avec $\alpha_i > 0$ et β_i dans $]0, 1[$, pour $i = 1, \dots, n$.

- 3.

$$U(c_1, \dots, c_n) = \left(\sum_{i=1}^n c_i^\rho \right)^{1/\rho}$$

avec $\rho \in]0, 1[$.

Exercice 12 (Inégalité arithmético-géométrique).

Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Etablir l'inégalité

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

pour tous $\alpha_i > 0$ tels que $\sum_i \alpha_i = 1$.

2. Quand a-t-on égalité ?
3. En déduire comment obtenir un parallélépipède rectangle d'aire minimum et de volume donné.

Exercice 13 (Le théorème spectral).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de l'exercice est de montrer l'existence d'une plus grande valeur propre de A , et d'au moins un vecteur propre associé, ce qui conduit ensuite au théorème de diagonalisation des endomorphismes symétriques.

1. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ admet un ou plusieurs maxima globaux sous la contrainte $\|x\|^2 = 1$.
2. En calculant les points critiques du Lagrangien associé, montrer qu'il existe au moins un $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tels que $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ et $\|\bar{x}\|_2 = 1$.
3. Montrer qu'il existe un plus grand tel λ , et déterminer le maximum global de $\langle x, Ax \rangle$ sous la contrainte $\|x\|^2 = 1$ en fonction de ce λ .

Exercice 14 (Inégalité de Hölder).

Soit $p > 1$. On note $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Etant donné $a \in \mathbb{R}^n$, on veut minimiser l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \langle a, x \rangle$ sous la contrainte $\|x\|_p = 1$.
 - (a) Ecrire le Lagrangien associé au problème et trouver les points critiques.
 - (b) Montrer que le système admet un unique minimum et le déterminer.
2. En déduire l'inégalité de Hölder : $|\langle x, a \rangle| \leq \|x\|_p \|a\|_{p'}$.
3. Montrer que quels que soient les entiers naturels non nuls p, q, r tels que $1/p + 1/q = 1/r$ et quels que soient les vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|x \cdot y\|_r \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Exercice 15 (Formule de Héron).

Montrer que l'aire d'un triangle dont le périmètre est fixé est maximale lorsque le triangle est équilatéral ; on pourra commencer par démontrer que l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle de côtés a, b et c vérifie

$$\mathcal{A}^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Exercice 16 (Inégalité de Hadamard).

Dans cet exercice, on cherche à montrer que, pour tous n -uplets de vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$, on a

$$|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que le problème est équivalent à montrer que

$$\sup_{(e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}} |\det(e_1, \dots, e_n)| \leq 1,$$

où $\mathcal{E}$ est l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ formées de vecteurs normés.

2. Montrer que, si $x_2, \dots, x_n$ est une famille libre donnée et si x_1 est un maximum de la fonction $\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \xi \mapsto \det(\xi, x_2, \dots, x_n)$, alors x_1 est orthogonal à $x_2, \dots, x_n$.
3. En déduire que tout maximiseur est une base orthonormale.
4. Conclure.

Exercice 17. Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au problème :

$$V(\alpha) := \inf\{f(x) : g(x) = \alpha\}$$

On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, le problème précédent admette une unique solution x_α . On suppose en outre que :

$$dg_{x_0} \neq 0 \text{ et que } \alpha \mapsto x_\alpha \text{ est différentiable en } 0.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que $df_{x_0} = \mu_0 dg_{x_0}$.
2. Montrer que V est différentiable en 0 et que $V'(x_0) = \mu_0$.

Exercice 18 (Problème de pénalisation). Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec g convexe sur $\mathbb{R}^n$ et f strictement convexe et coercive sur $\mathbb{R}^n$. On suppose de plus que l'ensemble $C := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$ est non vide et on veut minimiser f sur C . Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $h(x) := \max(g(x), 0)^2$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème pénalisé suivant

$$\inf \{f(x) + ph(x) : x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2)$$

1. Expliquer pourquoi intuitivement le problème pénalisé est une approximation raisonnable du problème initial quand p est grand.
2. Montrer que le problème initial admet une unique solution $x^* \in C$.
3. Montrer que h est convexe.
4. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
5. Montrer que pour tout p le problème pénalisé admet une unique solution $x_p \in \mathbb{R}^n$.
6. Montrer que x_p est bornée et que $h(x_p)$ tend vers 0.
7. Montrer que x_p converge vers x^* .
8. Donner la condition d'optimalité caractérisant x_p .
9. On suppose que la contrainte est qualifiée en x^* . Rappeler ce que cela signifie, puis, en utilisant ce qui précède montrer qu'il existe $\mu \geq 0$ tel que :

$$\nabla f(x^*) + \mu \nabla g(x^*) = 0 \text{ et } \mu g(x^*) = 0.$$