Université Paris-Dauphine
Année universitaire 2018-2019
Analyse 3, Licence MIE, 2ème année

Chapitre 3 : Intégrales généralisées

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, où $a,b \in \mathbb{R}, a < b$, tel que $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$. Montrer que $\int_a^b f(x)dx = 0$ si et seulement si $f(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$.

Exercice 2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
1. Montrer à l'aide d'un changement de variables que l'on a

$$\int_0^\pi x f(\sin(x))\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x))\, dx.$$

2. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)}\, dx.$$

Exercice 3. Soit $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n\, dx.$
1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

2. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 4. Soit $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\cos(t) + 1}{1 + t^2}\, dt.$
1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée de f et en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est positive sur $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$, et négative sur $[0,1]$.
4. Pour quelles valeurs de x la fonction f s'annule-t-elle ?

Exercice 5. Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^2}\, dt$ et $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\arctan(t)}{(1+t)^2}\, dt.$
1. a. Déterminer la valeur de $I(x)$ en fonction de x.
b. En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction I en $+\infty$.

2. a. Déterminer la valeur de $J(x)$ en fonction de x.
b. En déduire l'existence et la valeur de la limite de la fonction J en $+\infty$.

Exercice 6. Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

$$\text{(i)} \int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \ ;\ \text{(ii)} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+e^t)(1-e^{-t})} \ ;\ \text{(iii)} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \ ;$$

$$\text{(iv)} \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \ ;\ \text{(v)} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\, dt.$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

- pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 2^{n+1}(x-n)$ sur $\left[n, n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]$,
- pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = 2^{n+1}(n+\frac{1}{2^n}-x)$ sur $\left[n+\frac{1}{2^{n+1}}, n+\frac{1}{2^n}\right]$,
- $f(x) = 0$ en dehors des intervalles $\left[n, n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]$ et $\left[n+\frac{1}{2^{n+1}}, n+\frac{1}{2^n}\right]$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Dessinez rapidement f sur $[0,3]$.
2. Vérifiez que f est une fonction positive.
3. Calculer $\int_0^{n+1} f$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.
4. La fonction f tend-elle vers 0 en $+\infty$?

Exercice 8. Déterminer la nature des intégrales suivantes.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt$; (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}\,dt$; (iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$;

(iv) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)+e^t}\,dt$; (v) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3-5t^2+1}{2t^4+2t^3+t^2+1}\,dt$; (vi) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}\,dt$;

(vii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)^2}{\sqrt{|t^2-1|}(\sqrt{t}+2)}\,dt$; (viii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{t}}})\,dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$;

(ix) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}dx$; (x) $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha|\ln x|^\beta}dx$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (*Intégrales de Bertrand*) .

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
1. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\,dt$.
2. On suppose que $f(b) \neq 0$. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{f(t)^2\ln(t-a)}{(b-t)^2}\,dt$.

Exercice 10. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = 0$ et que f est dérivable en 0.
1. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ est convergente.
2. On suppose que $f'(0) \neq 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt$ est divergente.

Exercice 11.
1. Montrer que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ sont convergentes.
2. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ est convergente, et que sa valeur est égale à

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt = 0.$$

3. Soit $a > 0$. A l'aide d'un changement de variables approprié, en déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2a}\ln(a).$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que l'intégrale $\int_0^\infty |f'(x)|\, dx$ converge. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\sin(x)\, dx$ converge.

Exercice 13. Déterminer la nature de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx.$$

Exercice 14. Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$.
1. Montrer que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma(1) = 1.$$

2. Montrer que

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15. Soit $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

3. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Remarque. On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 16.[*] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt \text{ converge.}$$

Montrer que

$$J(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(t)|\, dt$$

est bien défini pour tout x réel, et déterminer sa limite lorsque x tend vers 0.

[*]Exercice difficile, à n'aborder que si vous avez fait tout le reste.