

---

FEUILLE 2 : COURBES PARAMÉTRÉES

---

*Without geometry, life is pointless ...*

**Exercice 1.** Quel est la nature du point de paramètre  $t = 0$  pour les arcs paramétrés suivants ?

$$\begin{array}{ll} t \mapsto (t + 2t^2 - t^3, t + 2t^2 - t^7) & t \mapsto (-t + t^2, t^2 + t^3) \\ t \mapsto (-t^2 - 2t^3, -t^3 - t^5) & t \mapsto (t^2 + 3t^3 + t^4, -2t^2 - 6t^3 + t^4). \end{array}$$

**Exercice 2.** Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \frac{\cos^2(t)}{2 - \cos(t)} \end{cases} .$$

On précisera le comportement au voisinage des points singuliers.

**Exercice 3.** Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^3 - t}{2t - 1} \\ y(t) = tx(t) \end{cases} .$$

On précisera les points doubles, les inflexions, les données relatives à l'asymptote et aux branches paraboliques.

**Exercice 4.** Etudier les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \sin t \\ y(t) = \cos^2 t, \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = 3 \cos t + 2 \cos(3t) \\ y(t) = 3 \sin t - 2 \sin(3t) \end{cases}$$

**Exercice 5.** Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \frac{t^2}{t - 1} \end{cases} .$$

On précisera les points doubles, les inflexions, les données relatives à l'asymptote et aux branches paraboliques. Montrer par ailleurs que les tangentes au point double sont orthogonales.

**Exercice 6.** Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2 + 1}{t^3 - 1} \\ y(t) = \frac{2t}{t^3 - 1} \end{cases} .$$

Montrer de plus :

1. Que les points de paramètres  $t, u, v$  sont alignés si et seulement si

$$tuv = t + u + v + 1.$$

2. Que  $\mathcal{C}$  admet exactement trois points d'inflexion et qu'ils sont alignés.

**Exercice 7.** Etudier la courbe paramétrée suivante :  $\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th}(t) \\ y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{cases}$ . Soit  $T(t)$  un point de la courbe

d'abscisse positive, et  $M$  le point d'intersection de la tangente à la courbe au point  $T$  avec  $(Ox)$ . Montrer que  $MT$  est constante.

**Exercice 8.** Tracer l'arc paramétré

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 4t^3 \end{cases}.$$

Trouver les droites à la fois tangentes et normales à l'arc.

**Exercice 9.** Etudier la courbe paramétrée suivante :  $t \mapsto (t + \frac{1}{t}, t + \frac{1}{2t^2})$ ,  $t \in \mathbb{R}^*$ . On étudiera en particulier la position par rapport aux asymptotes, et la tangente aux points stationnaires.

**Exercice 10.** Déterminer l'enveloppe de la famille de droite  $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{R}}$  définie par l'équation cartésienne

$$t^3(x - 1) + 3tx - 2y = 0.$$

**Exercice 11.** Soit  $C(0, 1)$  et  $M$  un point courant de l'axe des abscisses. On considère la famille de droites constituées par les droites orthogonales à  $CM$ , lorsque  $M$  décrit l'axe des abscisses. Quelle est l'enveloppe de cette famille de droites ?

**Exercice 12.** Pour  $p > 0$  on donne la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y^2 = 2px$ . Soit un carré  $ABCD$  tel que  $B, D \in \Gamma$  et  $A, C$  appartiennent à l'axe de symétrie de  $\Gamma$ .

1. Quelle relation lie les abscisses de  $A$  et  $C$  ?
2. On construit une suite  $(M_n)$  de points de  $Ox$ ,  $M_n$  d'abscisse  $x_n$ , telle que  $x_{n+1} > x_n$  et  $M_n M_{n+1}$  est la diagonale d'un carré dont les deux autres sommets appartiennent à  $\Gamma$ . Déterminer un équivalent de  $x_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 13.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Trouver les courbes qui intersectent toutes les droites passant par l'origine avec un angle  $\alpha$ .

**Exercice 14.** Soit  $c : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  un chemin dans le plan, de classe  $C^2$ . La *longueur* de  $c$  est

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} \|c'(t)\| dt.$$

1. Montrer que  $L(c)$  est invariant par changement de paramétrage (on fera des hypothèses plausibles sur le "changement de paramétrage").
2. Supposons que  $t \in ]t_0, t_1[$  soit un point régulier ( $c'(t) \neq 0$ ). Le *vecteur tangent unitaire* est

$$\tau(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|},$$

et le *vecteur normal unitaire* est le vecteur  $\nu(t)$  obtenu à partir du précédent par une rotation de  $\pi/2$ . La (*droite*) *normale* est la droite passant par  $c(t)$  et dirigée par le vecteur normal unitaire.

- (a) Montrer que généralement les normales en  $t$  et en  $s$  se coupent en un point unique, et que ce point a une limite quand  $s$  tend vers  $t$ . On appelle *centre de courbure* et l'on note  $C(t)$  cette limite.
- (b) Déterminer le nombre  $R(t) \geq 0$ , appelé le *rayon de courbure*, tel que  $C(t) = c(t) \pm R(t)\nu(t)$ . La *courbure* est  $1/R(t)$ .
- (c) Le chemin  $C$  est la *développée* de  $c$  et, inversement,  $c$  est la *développante* de  $C$ . Trouver la développée de  $c(t) = (3t - t^3, 3t^2)$ .