Université Paris-Dauphine
Calcul Différentiel et Optimisation (L3)
Responsable : Emeric Bouin

Année universitaire 2018-2019

Feuille 3 : Connexité

Exercice 1. Parmi les ensembles suivants, dire, en le justifiant, lesquels sont connexes ou préciser leurs composantes connexes.

$$\begin{aligned}
&A = \{0\} \cup [1, 2],\\
&B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},\\
&C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 1\},\\
&D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \neq 1\},\\
&E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x + y + z \leq 1\},\\
&F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^2\},\\
&G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y^2\}.
\end{aligned}$$

Exercice 2. L'intérieur d'une partie connexe (resp. connexe par arcs) est-il toujours connexe (resp. connexe par arcs) ?

Exercice 3.

1. Montrer que le plan complexe privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Combien a t'il de composantes connexes ?
4. Les espaces $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont-ils connexes ? Que peut-on dire avec $\mathbb{C}$ à la place de $\mathbb{R}$?
5. Quelles sont les parties connexes de $\mathbb{Q}$ et de son complémentaire ?
6. Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E.

1. Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice 5. Combien faut-il tracer de lacets au minimum sur un tore à 2-trous pour le disconnecter ?

Exercice 6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On cherche à montrer qu'un **ouvert** U de E est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

1. Justifier qu'une implication est toujours vraie même si U n'est pas supposé ouvert.
2. Justifier que l'équivalence est fausse si U n'est pas supposé ouvert.
3. On suppose maintenant que U est connexe mais n'est pas connexe par arcs, c'est-à-dire qu'il existe deux points a et b de U qui ne sont pas reliés par un chemin continu. On définit alors les deux ensembles
$$X = \{x \in U,\, x \text{ est connecté à } a\}, \qquad Y = \{x \in U,\, x \text{ n'est pas connecté à } a\}.$$
   (a) Montrer que X et Y sont des ouverts-fermés non vides de U.
   (b) Conclure.

Exercice 7. Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si A est connexe, alors sa frontière est connexe.

2. Si $\bar{A}$ est connexe, alors A est connexe.
3. Si A et B sont connexes, alors $A \cap B$ est connexe.
4. Si A et B sont connexes, alors $A \cup B$ est connexe.
5. Si $f : A \to F$ est continue, avec A convexe et F espace vectoriel normé, alors $f(A)$ est convexe.

Exercice 8. Démontrer que les composantes connexes d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont ouvertes. En déduire que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'une famille finie ou dénombrables d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 9. On note $A = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) ;\ x > 0\right\}$.

1. Démontrer que A est connexe.
2. Démontrer que $\bar{A} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup A$.
3. Démontrer que $\bar{A}$ est connexe.
4. On souhaite démontrer que $\bar{A}$ n'est pas connexe par arcs. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \bar{A}$ avec $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin 1)$. On note $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ de sorte que, si $u(t) \neq 0$, alors $v(t) = \sin(1/u(t))$. Enfin, on note $t_0 = \sup\{t > 0;\ u(t) = 0\}$ (l'instant où le chemin quitte l'axe des ordonnées).
   (a) Démontrer que $u(t_0) = 0$.
   (b) On pose $a = v(t_0)$. Justifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $t_0 \leq t \leq t + \varepsilon$, alors $|v(t) - a| < 1/2$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} < u(t_0 + \varepsilon)$. Justifier qu'il existe $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ avec $u(t_1) = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ et $u(t_2) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.
   (d) Conclure.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On dit qu'une suite $u = (u_n)$ de E est à évolution lente si

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0.$$

Pour une suite u de E, on note $V(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence, dont on rappelle que c'est un fermé de E. Le but de l'exercice est de démontrer que si une suite u est bornée et à évolution lente, alors l'ensemble $V(u)$ est connexe. On effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que $V(u)$ n'est pas connexe.

1. Démontrer qu'il existe deux compacts K_1 et K_2 vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} K_1 \cap K_2 & = & \varnothing \\ K_1 \cup K_2 & = & V(u). \end{array} \right.$$

2. Démontrer que la distance entre K_1 et K_2 est strictement positive. Elle sera notée a.
3. On note $\Omega_1 = \{x \in E;\ d(x, K_1) < a\}$ et $\Omega_2 = \{x \in E;\ d(x, K_2) < a\}$. On considère M un majorant de la suite $\|u\| = (\|u_n\|)_n$. Démontrer que

$$K = \overline{B(0,M)} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

   est un compact.
4. Démontrer qu'il existe une suite extraite de u à valeurs dans K et conclure.