Université de Paris Dauphine
Année universitaire 2017-2018
Analyse 3, Licence MIE 2ème année

Chapitre 4: Séries entières

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

(i) $A(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{2^n n^n}{(2n)!} x^n$, (ii) $B(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} x^n$, (iii) $C(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)^2} x^n$,

(iv) $D(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n x^n$, (v) $E(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n})}\right)^n x^n$, (vi) $F(x) = \sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^n}{n!} x^{2n}$,

(vii) $G(x) = \sum\limits_{n\geq 0} c_n x^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes en fonction du paramètre $a > 0$:

(i) $A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!} x^n$, (ii) $B(x) = \sum\limits_{n\geq 0} (a^n - 1) x^n$,

(iii) $C(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \ln(1 + a^n) x^n$.

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, ainsi que leur somme sur l'intervalle $]-R, R[$.

(i) $A(x) = \sum\limits_{n\geq 0} (2^n + 3^n) x^n$, (ii) $B(x) = \sum\limits_{n\geq 0} (3n+1) x^{3n}$, (iii) $C(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{4n}}{(2n)!}$,

(iv) $D(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \sin(n) x^n$, (v) $E(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{4^n}{n+1} x^{n+1}$, (vi) $F(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \frac{\cos(n)}{n!} x^n$.

Exercice 4. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence R.

1.a. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n^2$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ est égal à R^2.
b. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \sin^2(\frac{1}{3^n}) x^n$.

2.a. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n} = a_n$, et $b_{2n+1} = 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ est égal à $\sqrt{R}$.
b. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \ln(1 + \frac{1}{2^n}) x^{2n}$.

Exercice 5. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence égal à 1, et $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

1.a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

b. Soient S_a et S_b, les sommes des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$. En déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[, \; S_b(x) = \frac{1}{1-x} S_a(x).$$

2.a. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, \; \sum\limits_{k=0}^{n} (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

b. En déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[, \; \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2) x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Exercice 6. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le disque de convergence de cette série entière, de sa série dérivée et de sa série dérivée seconde.
2. Calculer la valeur de sa somme S.

Indication. On pourra commencer par calculer la dérivée seconde de S.

3. En déduire la valeur de

$$I = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}.$$

Exercice 7. Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière, et calculer leur développement.

(i) $f(x) = e^x \cos(x)$, (ii) $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, (iii) $h(x) = \frac{2}{x^2-4x+3}$,

(iv) $i(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, (v) $j(x) = \ln(1+x+x^2)$.

Indication : pour j, on remarquera que $j'(x)$ s'écrit sous la forme d'une fraction rationnelle.

Exercice 8. Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes.

(i) $y' - x^2 y = 0, y(0) = 1$; (ii) $(1-x^2)y' - 2xy = 0$; (iii) $xy'' + 2y' + xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$;

(iv) $xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0$; (v) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2, y(0) = y'(0) = 0$; (vi) $xy' - y = \frac{x^2}{1-x}$.

Remarque. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 9. On considère la fonction

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que f est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 0,\ y(0) = 1.$$

Indication. On calculera, pour une solution y, la dérivée de $x \mapsto y(x)\sqrt{1-x^2}$.
2. En déduire que f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et déterminer son développement en série entière.

Exercice 10. On considère l'équation différentielle ordinaire

$$y'' - 2xy' - 2y = 0. \tag{1}$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation (1).
2. Soit y une solution de l'équation (1), définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
a. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y(x)\right)\right) = 0.$$

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

Exercice 11. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(3n)!}x^{3n}$.
1. Calculer le rayon de convergence de cette série entière.
2. Déterminer une équation différentielle à coefficients constants d'ordre trois vérifiée par la somme S de cette série entière.
3. Calculer les solutions de cette équation différentielle.
Indication. On recherchera ces solutions sous la forme $x \mapsto e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{C}$.
4. En déduire la valeur de S.

Exercice 12. Pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$, on introduit la série de fonctions

$$F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{kn}.$$

1. Expliquer pourquoi il s'agit d'une série entière. Déterminer son rayon de convergence et sa somme, quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$.
2.a. Montrer que la fonction $F_1F_2F_5$ admet un développement en série entière :

$$F_1(x)F_2(x)F_5(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?
b. Montrer que le nombre de façons de payer 171 euros en pièces de 1 et 2 euros et en billets de 5 euros est c_{171}. En déduire une méthode pour le calculer.