Université Paris-Dauphine
Calcul Différentiel et Optimisation (L3)
Responsable : Emeric Bouin

Année universitaire 2018-2019

FEUILLE 4 : ESPACES MÉTRIQUES

---

1 Topologie métrique

Exercice 1. Soit $X =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in X$, on note

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

1. Démontrer que d est une distance sur X.
2. Déterminer $B(1, 1)$ pour cette distance.
3. La partie $A =]0, 1]$ est-elle bornée pour cette distance ? fermée ?
4. Déterminer les boules ouvertes pour cette distance.
5. La distance d et la distance issue de $|\cdot|$ définissent elles la même topologie sur X ?

Exercice 2. Soit E un ensemble. On définit d sur $E \times E$ par $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$ et $d(x, y) = 0$ si $x = y$.

1. Démontrer que d est une distance.
2. Déterminer $B(x, r)$ où $x \in E$ et $r > 0$.
3. En déduire les ouverts et les fermés de (E, d).
4. Si $E = \mathbb{R}$, d est-elle topologiquement equivalente à la distance usuelle ?

Exercice 3. On considère l'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$.

1. Démontrer que d est une distance.
2. Déterminer $B(x, r)$ où $x \in E$ et $r > 0$.
3. Quelles sont les parties de $\mathbb{R}$ bornées pour cette distance ?

Exercice 4. Soient d_1 et d_2 deux distances sur l'ensemble E.

1. Montrer que $d := d_1 + d_2$ et $\delta := \max(d_1, d_2)$ sont des distances équivalentes. Définissent-elles la même topologie ?
2. Montrer que pour tout $r > 0$ et $x_0 \in E$, on a $B_\delta(x_0, r) = B_{d_1}(x_0, \varepsilon) \cap B_{d_2}(x_0, \varepsilon)$.
3. Montrer que l'intersection d'un ouvert pour d_1 et d'un ouvert pour d_2 est un ouvert pour δ.
4. Comment relier les boules ouvertes de d à celles de d_1 et d_2 ?

Exercice 5. Soit E un e.v.n. et $A \subset E$ une partie non vide. Pour $x \in E$ on pose $d(x, A) = \inf \{\|x - a\|,\ a \in A\}$.

1. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue.
3. Soient deux parties de $\mathbb{R}^n$ non vides A, B. Donner une condition équivalente à $d_A = d_B$.
4. Montrer que tout fermé de $[0, 1]$ non vide est l'ensemble des points fixes d'une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

2 Complétude des espaces métriques

Exercice 6. (Cours)

On se place sur un espace métrique (E, d). Montrer les propriétés suivantes :

1. Toute suite de Cauchy est bornée.
2. Une suite de Cauchy est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
3. Toute suite convergente est de Cauchy.

Exercice 7. Soient (u_n), (v_n) deux suites d'un espace métrique (E, d) telles que $\lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = 0$. On suppose que (u_n) est de Cauchy. Montrer que (v_n) est de Cauchy aussi.

Exercice 8. Soient X et Y deux espaces métriques et f une application de X dans Y.

1. Montrer que si f est uniformément continue, alors elle conserve les suites de Cauchy. Qu'en est-il de la réciproque ?
2. Montrer que ce n'est pas vrai en général si f est seulement continue.
3. Supposons f uniformément continue, bijective et de réciproque continue. Montrer que si Y est complet, X l'est aussi.

Exercice 9. L'espace $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet si d est l'une des métriques suivantes ?

1. $d(x, y) = |x^3 - y^3|$,
2. $d(x, y) = |e^x - e^y|$,
3. $d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, et $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme des applications linéaires :

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F.$$

Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.

Exercice 11. (Théorème de prolongement uniformément continu)

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On suppose de plus que (F, δ) est complet. Soit A une partie dense de E et $f : (A, d) \mapsto (F, \delta)$ une application uniformément continue.

1. Justifier que pour tout $x \in E\backslash A$, il existe au moins une suite d'éléments de A qui converge vers x.
2. Montrer que pour tout $x \in E$, la limite $\lim_{y\in A\to x} f(y)$ existe.
3. On définit l'application $g : E \mapsto F$ par

   $$g(x) = f(x) \text{ si } x \in A, \qquad g(x) = \lim_{y\in A\to x} f(y) \text{ si } x \notin A.$$

   Montrer que g est uniformément continue sur E.
4. Montrer l'existence d'une unique fonction $g : E \mapsto F$ uniformément continue, telle que $g_{|A} = f$.
5. *(Application)* Soit la métrique sur $\mathbb{R}$ définie par

   $$d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

   Montrer que l'identité de $(\mathbb{R}, d)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 12. Soit X l'espace des suites réelles nulles partir d'un certain rang, et soit

$$d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

pour $(x,y) \in X^2$.

1. Montrer que d est une distance sur X.
2. Montrer que X n'est pas complet pour la métrique d.
3. Trouver un espace de suites Y tel que (Y,d) soit complet et tel que X soit dense dans Y.

Exercice 13. On note c_0 l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0. Montrer que c'est un sous ensemble de ℓ^∞ et que la norme $\|\cdot\|_\infty$ en fait un espace de Banach.

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k \right\| = \max(|a_k|, k \in \mathbb{N}).$$

On note $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est-il complet pour la distance associée à la norme ?

Exercice 15. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On définit

$$\forall f \in E, \qquad \|f\|_{\mathcal{C}^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ est une norme.
2. Soit f_n une suite d'éléments de E. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1}$ si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f et $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f'.
3. Montrer que $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^1})$ est un espace de Banach.

Exercice 16. On considère la suite de fonctions

$$f_n(t) := \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{t}}\right), t \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer $\|f_p - f_q\|_1$ pour $p > q$.
2. Montrer que (f_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_1$.
3. La suite (f_n) converge-t-elle dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_1$? Conclure.

Exercice 17. On considère l'espace des fonctions continues $X = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Soit $\omega \in X$. Posons

$$d_\omega(f,g) = \sup_{t\in[a,b]} |\omega(t)\,(f(t) - g(t))|$$

On suppose enfin que ω ne s'annule qu'en au plus un nombre fini de points sur $[a,b]$.

1. Montrer que d_ω est une distance sur X.
2. La distance d_ω est elle équivalente à la distance usuelle (qui correspond à $\omega \equiv 1$) ?
3. L'espace (X, d_ω) est-il complet ?

Exercice 18.

1. Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|)$ est complet.
2. Montrer que pour tout $p \geq 1$, l'espace ℓ^p est inclus dans ℓ^∞.
3. Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas un sous espace fermé de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.
4. Illustrer le fait que la complétude est métrique et non topologique.

Exercice 19. Soit E un espace de Banach, $u \in \mathcal{L}_c(E)$ avec $\|u\|_{\mathcal{L}_c(E)} < 1$ montrer que la série $\sum_n u^n$ converge dans $\mathcal{L}_c(E)$ vers une limite v. Calculer $(id - u) \circ v$. En déduire que $id - u$ est inversible.