Université Paris-Dauphine
Calcul Différentiel et Optimisation (L3)
Responsable : Emeric Bouin

Année universitaire 2018-2019

Feuille 5 : Le théorème du point fixe

---

1 Autour du théorème de Banach-Picard

Exercice 1. Soit (M, d) un espace métrique complet et f une application de M dans M. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série de terme général $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On suppose que pour tout n, la fonction $f^{(n)}$ (c'est à dire f itérée n fois) est Lipschitzienne de rapport λ_n.

1. Montrer qu'il existe un unique point fixe a pour f et que toute suite $(f^{(n)}(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.
2. Estimer la vitesse de convergence.

Exercice 2. On note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit f une application contractante (pour d) de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad g(x) := x + f(x).$$

Montrer que g est bijective.

Exercice 3. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = (\cos(x) - \sin(y), \sin(x) - \cos(y)) .$$

1. Choisir une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\|dF_{(x,y)}\| \leq \sqrt{2}$.
2. En déduire que la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\cos(x_n) - \sin(y_n)\right), \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sin(x_n) - \cos(y_n)\right). \end{cases}$$

   converge pour tout (x_0, y_0).
3. Donnez l'équation que vérifie sa limite. La limite dépend-elle du point de départ (x_0, y_0) ?

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 < 1$.

1. En utilisant le théorème du point fixe de Picard, montrer que pour tout $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, le système

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad x_i - \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i$$

   admet une unique solution.
2. En utilisant le théorème du point fixe de Banach, montrer que pour tout $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, le système

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad x_i - \sum_{j=1}^n \sin(a_{i,j} x_j) = b_i$$

   admet une unique solution.

Exercice 5. Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue f sur $[0,1]$ vérifiant pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = \sup_{y\in[0,1]} \left(\cos(x^2 - y^2) + \alpha f(y)\right).$$

Exercice 6. On munit l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$, *i.e.* $E = \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, de la norme uniforme. On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, continue et globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, c'est à dire

$$\exists M > 0, \quad \forall ((t,x),(t,y)) \in \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\right)^2, \qquad |f(t,x) - f(t,y)| \leq M|x-y|.$$

Soit $T > 0$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in]0,T[, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

pour $y_0 \in \mathbb{R}$. On définit l'opérateur $\mathcal{F}$ de E sur E par

$$\forall t \in [0,T[, \qquad \mathcal{F}(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\, ds.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est bien défini.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $\mathcal{F}^{(p)}$ est Lipschitzienne, et que pour p suffisamment grand, dépendant seulement de T, elle est contractante.
3. Montrer que pour tout $T > 0$, existe un unique élément $y \in E$ tel que $\mathcal{F}(y) = y$.
4. Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie sur $[0,T[$ l'équation différentielle
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$
5. Peut-on choisir $T = +\infty$ dans ce résultat ?

Exercice 7 (J.-C. Yoccoz)**.** Soit (x_n) une suite réelle définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et

$$x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

On veut montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que (x_n) soit bornée à valeurs positives.

1. Montrer que, si (x_n) est bornée, pour tout n on a $10 \leq x_n \leq 11$.
2. Soient X l'ensemble des suites réelles (y_n) de $[10,11]$, d la distance
$$d((y_n),(z_n)) = \sup_n |y_n - z_n|$$
et F l'opérateur
$$F : X \to X, \quad (y_n) \mapsto (z_n), \quad z_n = \sqrt{100 - \sin n + y_{n+1}}.$$
Vérifier que F est bien défini. Quelle est son rapport de Lipschitz ?
3. Conclure. On donnera une estimation de l'unique point fixe (a_n) de F.

2 Autres exercices

Exercice 8. Soit $c > 0$ et $f : [0, c] \to [0, c]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme :

$$f(x) = x - ax^\alpha + o(x^\alpha), \quad a > 0, \quad \alpha > 1.$$

1. Montrer que, pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers 0.
2. Déterminer un équivalent de u_n. *(Indication : on commencera par chercher un équivalent de $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$, pour β subtilement choisi).*
3. Traiter l'exemple de $\sin(x)$ et $\ln(1 + x)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ ayant a comme point fixe. On notera ici $f^{(n)}$ la fonction f composée n fois avec elle-même.

1. Supposons que a est *attractif* : $|f'(a)| < 1$. Montrer que, si x est assez proche de a, la suite $(f^n(x))$ est définie sur $\mathbb{N}$ et, si $f'(a) \neq 0$, converge vers a géométriquement :

$$f^{n+1}(x) - a \approx f'(a)(f^n(x) - a) \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

2. Supposons que a est même *surattractif* : $|f'(a)| = 0$. La question précédente montre que, si x est assez proche de a, la suite $(f^n(x))$ est définie sur $\mathbb{N}$ et converge vers a. Montrer que, si $f''(a) \neq 0$, la convergence est quadratique :

$$f^{n+1}(x) - a \approx \frac{f''(a)}{2}(f^n(x) - a)^2 \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

3. Supposons au contraire que a est *répulsif* : $|f'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que quel que soit $x \in V \setminus \{a\}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(x) \notin V$.
4. Comment calculer les décimales du *nombre d'or* $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ à ϵ près ? On pourra considérer l'application $f : [0, +\infty[, x \mapsto \sqrt{x + 1}$.