

---

FEUILLE 8 : FONCTIONS IMPLICITES

---

**Exercice 1.** On considère l'équation

$$2xy - 2x + y - 2 = 0,$$

1. Montrer qu'il existe une fonction  $\Phi$  sur un domaine  $D_\Phi \subset \mathbb{R}$  telle que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a,

$$(x, y) \text{ est solution} \iff x \in D_\Phi \text{ et } y = \Phi(x).$$

2. Montrer qu'il existe une fonction  $\Psi$  sur un domaine  $D_\Psi \subset \mathbb{R}$  telle que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a,

$$(x, y) \text{ est solution} \iff y \in D_\Psi \text{ et } x = \Psi(y).$$

3. Quel lien peut-on faire entre les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  ?

**Exercice 2.** Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  on pose  $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 1$ .

1. Montrer que pour  $x$  suffisamment proche de 0, il existe un unique  $y(x) > 0$  tel que  $f(x, y(x)) = 0$ .
2. Faire un dessin de  $x \mapsto y(x)$ .
3. Montrer, sans résolution explicite, que la fonction  $y$  ainsi définie au voisinage de 0 est dérivable et pour  $x$  proche de 0,  $y'(x) = -\frac{3x}{5y(x)}$ .
4. En déduire un développement à l'ordre 2 de  $y$  au voisinage de 0.

**Exercice 3.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $\phi : U \mapsto \mathbb{R}^2$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  :  $\phi = (f, g)$ . On considère  $(u, v)$  réels et on cherche  $x, y$  tels que

$$\phi(x, y) = (u, v).$$

1. A-t-on des solutions si la différentielle de  $\phi$  est de rang 0 ?
2. On suppose que la différentielle de  $\phi$  est de rang 2 en tout point de  $U$ . Montrer que pour tout  $(u, v)$  le système admet une solution, unique localement. Que peut-on dire si la différentielle est de rang 2 en un point de  $U$  seulement ?
3. On suppose maintenant que la différentielle de  $\phi$  est de rang 1 en tout point de  $U$ .
  - (a) Si  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ne s'annule pas sur  $U$ , montrer que  $\psi : (x, y) \mapsto (f(x, y), y)$  définit un difféomorphisme d'un ouvert  $V \subset U$  sur  $\psi(V)$ .
  - (b) En déduire  $G$  telle que  $g(x, y) = G(f(x, y))$  sur  $V$ .
  - (c) Que peut-on dire des solutions du système ?

**Exercice 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On s'intéresse à l'équation

$$M^3 + N^3 - 3MN = I_n,$$

d'inconnue  $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ .

1. Montrer que l'équation définit localement  $M = \Phi(N)$  au voisinage de  $(M, N) = (0, I_n)$ .
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de  $\Phi$  au voisinage de l'identité.

**Exercice 5.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice possédant  $n$  valeurs propres réelles distinctes. En élaborant une preuve basée sur le théorème des fonctions implicites, montrer que si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est proche de  $A$ , alors  $M$  possède également  $n$  valeurs propres réelles distinctes, et ces valeurs propres dépendent continument de  $M$ .

**Exercice 6.** On note  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

1. Soit  $A_0$  une matrice symétrique inversible. On considère l'application  $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  définie par

$$\Phi(M) = M^\top A_0 M.$$

Montrer qu'elle est différentiable et calculer sa différentielle en l'identité.

2. Montrer que  $d\Psi_{I_n}$  est surjective (on pensera à réduire  $A_0$ ) et calculer son noyau.
3. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $A_0$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et une application  $\Psi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto GL_n(\mathbb{R})$  tels que

$$\forall A \in V, \quad A = \Psi(A)^\top A_0 \Psi(A)$$

4. En déduire que l'ensemble des formes quadratiques de signature  $(p, q)$  avec  $p + q = n$  est un ouvert de l'espace vectoriel des formes quadratiques sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 7.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Pour  $\varepsilon > 0$  fixé, on considère l'équation

$$(x - a)(x - b) - \varepsilon x^3 = 0.$$

1. Montrer que pour  $\varepsilon > 0$  assez petit l'équation admet trois solutions distinctes  $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$ .
2. Donner un développement asymptotique de  $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon)$  et  $x_3(\varepsilon)$  jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

**Exercice 8.** On considère le système de trois équations à quatre inconnues

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2, \\ x + y + z + t = 0, \end{cases}$$

dont on cherche les solutions dans  $\mathbb{R}^4$ .

1. Montrer qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $(0, -1, 1, 0)$  et une fonction  $\Phi : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$  de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de 0 tels que  $(x, y, z, t) \in \mathcal{V}$  est solution du système si et seulement si  $(x, y, z) = \Phi(t)$ .
2. Calculer la dérivée de  $\Phi$  en 0.

**Exercice 9.** Soient  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ , et l'équation  $(E) : \cos(tx) + \sin(tx) = x$ .

1. Montrer qu'il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}$ , voisinage de 0, tel que lorsque  $t \in U$ , l'équation  $(E)$  admet une unique racine  $x(t)$ .
2. Montrer que l'application  $t \mapsto x(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$ .
3. Donner un développement limité à l'ordre 3 de  $t \mapsto x(t)$  au voisinage de 0.
4. Quel est l'ouvert maximal sur lequel définir cette application  $t \mapsto x(t)$ ? On pourra s'aider d'un dessin.

**Exercice 10.** Soit  $f$  une application différentiable de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même, telle que  $f(0) = 0$ . On suppose que 1 n'est pas valeur propre de l'application linéaire  $df_0$ .

1. Montrer que 0 est un point fixe isolé.
2. *Application.* Soit  $f(x, y) = (x(\sin(xy) - 1) + y, y(\cos(xy) - 1) + x)$ . Montrer que  $f$  ne s'annule pas dans un voisinage épointé de l'origine, c'est à dire que dans un voisinage de l'origine, si  $g(x, y) = (0, 0)$ , alors  $(x, y) = (0, 0)$ .

3. Soit  $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit

$$f_\lambda(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel  $\varepsilon > 0$ , un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  et une application  $\omega : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \mapsto \mathcal{V}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , tels que, pour tout  $\lambda \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $\omega(\lambda)$  est l'unique point fixe de  $f_\lambda$  dans  $\mathcal{V}$ .

4. *Application.* Soit l'application  $G : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  définie par

$$G_\lambda(x, y, z) = \left( 2xe^x + y + \lambda e^{-(x^2+y^2)}, \sin(z) + \lambda \cos(x+y-z), 2y \cos(x) + \lambda \right)$$

Montrer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 dans  $\mathbb{R}^3$  tels que, pour tout  $|\lambda| < \varepsilon$ , l'application  $G_\lambda$  admet un point fixe unique dans  $\mathcal{V}$ .

**Exercice 11.** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation  $x - zt = f(z)$  définit localement  $z$  fonction implicite de  $t$  et  $x$ .
2. Montrer que l'on a alors :  $\frac{\partial z}{\partial t} - z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ .

**Exercice 12.** Soit  $f : (\mathbb{R}^3, (a, b, c)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\partial_x f(a, b, c) \neq 0, \partial_y f(a, b, c) \neq 0, \partial_z f(a, b, c) \neq 0.$$

On note  $X, Y, Z$  les fonctions, définies implicitement et localement, telles que

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = X(y, z) \Leftrightarrow y = Y(x, z) \Leftrightarrow z = Z(x, y).$$

Que vaut le produit  $\partial_y X \partial_z Y \partial_x Z$  au point  $(a, b, c)$ ? *C'est la formule de Clapeyron.*

**Exercice 13.** 1. Donner une valeur approchée de la solution, proche de 1, de l'équation

$$x^7 + 0,99x - 2,03 = 0.$$

2. Montrer que la solution exacte vérifie  $1 \leq x \leq 2$ .

**Exercice 14.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, p, q) \mapsto x^3 + px + q$ . Dessiner, pour  $p$  fixé respectivement  $< 0$ ,  $= 0$  et  $> 0$ , les courbes d'équation  $f(x, p, q) = 0$  dans le plan des  $(x, q)$ . Puis tracer dans le plan des  $(p, q)$  le lieu des points où l'équation  $f = 0$  ne détermine pas de fonction implicite  $x(p, q)$ .