
FEUILLE 9 : ORDRE SUPÉRIEUR

Exercice 1. Soit $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Étudier la continuité de f et de ses dérivées partielles premières sur \mathbb{R}^2 .
2. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Donner une condition suffisante sur les dérivées partielles de f pour que l'application

$$\begin{cases} \frac{f(x, y) - xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

soit continue.

Exercice 3. 1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^4 + y^2 + z^3, e^x \sin(yz))$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et calculer $d^2 f_{(0, \pi, 1)}((1, 2, 1), (0, 1, 0))$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\cos x \cosh(y), -\sin(x) \sinh(y))$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 et calculer $d^2 f_{(0, 0)}((1, 0), (0, 1))$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction π -périodique de classe \mathcal{C}^2 . On définit $g(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^2 f(\theta)$.

1. Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}(0, y)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, 0)$ en fonction de f .
2. En déduire les valeurs de $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0)$.
3. Construire un exemple précis (donner $g(x, y)$ en fonction de x et y) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) := f(\|x\|^2),$$

avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Calculer la Hessienne de g .

Exercice 6. Ecrire le développement de Taylor d'ordre 2 en $(0, 0)$ des fonctions définies par

$$\begin{aligned} e(x, y) &= \left(\frac{1}{(1 + \sin(x + y))^2}, \frac{\exp(x - y) - 1}{1 + \ln(1 + xy)} \right) \\ f(x, y) &= \ln(1 + 2x + 3y), \\ g(x, y) &= x^2 \exp(y) - y \exp(x), \\ h(x, y) &= \cos(\tan(x + \sin y)). \end{aligned}$$

Exercice 7. Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de $A \mapsto (\text{Tr}(AA^T))^2$ au voisinage de l'identité.

Exercice 8. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial f}{\partial y^2} = 0. \quad (\star)$$

où f est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ distincts, fixés. On fait le changement de variable :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

de sorte que $f(x, y) = g(u, v)$.

1. Écrire l'équation déduite de (\star) par ce changement de variable.
2. En déduire que f est solution de (\star) si et seulement si g est solution de l'une des équations suivantes

$$(1) : \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0, \quad (2) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0, \quad (3) : \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$

Exercice 9. Trouver les applications f appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y^2} = 0.$$

Indication : on pourra utiliser au choix le changement de variables : $u = xy, v = \frac{x}{y}$ ou les coordonnées polaires ... ou les deux !

Exercice 10. On note \mathcal{D} le disque unité du plan. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, telle que son laplacien Δf soit nul.

1. On définit, pour $r \in [0, 1]$, la fonction $g(r) = \int_0^{2\pi} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) d\theta$.
 - (a) Montrer que g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
 - (b) Montrer que g ne dépend pas de $r \in [0, 1]$.
2. Calculer alors $\iint_{D_r} f(x, y) dx dy$, D_r étant le disque fermé de centre 0 et de rayon r .

Exercice 11. Soit E et F deux \mathbb{R} -evn de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^1(E, F)$ telle que df est bornée sur E et qu'il existe $k > 0$ tel que df est k -Lipschitzienne (de E dans $\mathcal{L}_c(E, F)$). Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq a\|x - y\| + b\|x - y\|^2.$$

Exercice 12. Soit $a < b$ deux réels, $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[, \mathbb{R}^n)$ on suppose qu'il existe α et β positifs tels que

$$\|f(t)\| \leq \alpha \text{ et } \|f''(t)\| \leq \beta \text{ pour tout } t \in]a, b[.$$

Soit $t \in]a, b[$ et $r > 0$ tels que $]t - r, t + r[\subset]a, b[$ montrer que

$$\|f'(t)\| \leq \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta r}{2}$$

puis qu'il existe une constante telle que $\|f'(t)\| \leq C\sqrt{\alpha\beta}$.