UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE

CYCLE

ANNÉE : 18-19 SESSION : Janvier

MATIÈRE : Calcul différentiel

UV =

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : BOUIN

Prénoms : Emeric

N° GROUPE : VETERAN 1

Numéro de convocation :

Il est interdit aussi bien de signer à la fin de la composition que d'indiquer son nom ou son numéro sur les feuilles intercalaires.

N° de groupe :

Nombre d'intercalaires : 1

	Note	Signature	Note finale
1er correcteur			
2e correcteur			

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE

Ne pas écrire dans cette marge

Sujet : Exercice 1 :

1) • La fonction f est deux fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car elle est polynomiale en les variables x et y. On calcule son gradient $\nabla f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} y+3 \\ x-2y \end{pmatrix}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, de sorte que sa différentielle est donnée par $df_{(x,y)} : h \mapsto \begin{pmatrix} y+3 \\ x-2y \end{pmatrix} \cdot h$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. La hessienne de f est alors

$$Hess(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{pour } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ce qui donne pour différentielle seconde $(h,k) \mapsto \langle h, Hess(f) k \rangle$ ($\langle , \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$).

• On procède de même pour la fonction g. Elle est de classe $\mathcal{C}^2$ pour les mêmes raisons et $dg_{(x,y,z)}$ est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$. On l'assimile à sa matrice Jacobienne

PARTIE
A
RABATTRE

J_g qui vaut

$$J_g = \begin{pmatrix} 1 & -2yz & -y^2 \\ 3x^2+y^2 & 2xy & 3z^2 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant la différentielle seconde de g. On écrit alors, pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^3$, que

$$d^2g_{(x,y,z)}(h,k) = d\left(dg_{(x,y,z)}(h)\right)_{(x,y,z)}(k) = \begin{pmatrix} d\left(h_1 - 2yz h_2 - y^2 h_3\right)_{(x,y,z)}(k) \\ d\left((3x^2+y^2)h_1 + 2xy\, h_2 + 3z^2 h_3\right)_{(x,y,z)}(k) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2z h_2 - 2y h_3)k_1 + (-2y\, h_2)k_3 \\ (6x h_1 + 2y h_2)k_1 + (2y h_1 + 2x h_2)k_2 + 6z h_3 k_3 \end{pmatrix}.$$

- La fonction h est deux fois différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par composition de fonctions différentiables : $x \to \sin(x)$, $M \to \mathrm{Tr}(M)$ et $A \to A^T A$.

Pour $\begin{cases} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \\ H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$ $\quad dh_A(H) = d(\sin)_{\mathrm{Tr}(A^TA)}\left(d(\mathrm{Tr}(A^TA))_A(H)\right)$

$$= \cos(\mathrm{Tr}(A^TA)) \cdot d(\mathrm{Tr})_{A^TA}\left(d(A^TA)_A(H)\right)$$

$$= \cos(\mathrm{Tr}(A^TA)) \cdot \mathrm{Tr}\left(A^TH + H^TA\right)$$

$$= 2\cos(\mathrm{Tr}(A^TA))\, \mathrm{Tr}(A^TH).$$

On en déduit la différentielle seconde de h :

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(H,K) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$,

$$d^2h_A(H,K) = d\left(dh_A(H)\right)(K) = 2\Big(\mathrm{Tr}({}^tA^TH)\, d\left(\cos(\mathrm{Tr}(A^TA))\right)_A(K) + \cos(\mathrm{Tr}({}^tAA))\, d(\mathrm{Tr}({}^tAH))_A(K)$$

$$= 2\Big(-\mathrm{Tr}(A^TH) \cdot 2\sin(\mathrm{Tr}({}^tAA)\, \mathrm{Tr}(A^TK) + \cos(\mathrm{Tr}({}^tAA))\, \mathrm{Tr}({}^tKH)\Big).$$

2. Prenons $f \in L^4(\mathbb{R})$ et $h \in L^4(\mathbb{R})$. Alors $f+h \in L^4(\mathbb{R})$

et $\varphi(f+h) - \varphi(f) = \int_{\mathbb{R}} (f+h)^4(t) - f^4(t)\,dt$

$$= \int_{\mathbb{R}} (4f^3h + 6f^2h^2 + 4fh^3 + h^4)(t)\,dt$$

$$= 4\int_{\mathbb{R}} f^3(t)h(t)\,dt + \int_{\mathbb{R}} (6f^2h^2 + 4fh^3 + h^4)(t)\,dt$$

→ Par l'inégalité de Hölder, on a, avec $p = \frac{4}{3}$, $q = 4$,

$\left| \int_{\mathbb{R}} f^3 h\,dt \right| \leq \|f^3\|_{4/3} \|h\|_4 = \|f\|_{L^4}^3 \|h\|_{L^4}$ donc

l'application $L(h) = \int_{\mathbb{R}} f^3(t)h(t)\,dt$ est bien linéaire (easy) et continue.

→ On réapplique Hölder pour montrer que les termes restants sont petits:

- $\left| 6\int_{\mathbb{R}} f^2h^2\,dt \right| \leq 6\|f\|_{L^4}^2 \|h\|_{L^4}^2 = o(\|h\|_{L^4})$

- $\left| 4\int_{\mathbb{R}} fh^3\,dt \right| \leq 4\|f\|_{L^4} \|h\|_{L^4}^3 = o(\|h\|_{L^4})$

- $\int_{\mathbb{R}} h^4\,dt = \|h\|_{L^4}^4 = o(\|h\|_{L^4})$.

En conclusion, φ est différentiable sur L^4 et $d\varphi = L$.

3. Non. Si cela était le cas, il existerait un chemin $\gamma : [0,1] \to GL_n(\mathbb{R})$ reliant I_n et J_n (choisie de déterminant -1). Or dans ce cas, $\varphi(t) = \det(\gamma(t))$ est continue et $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = -1$, donc φ doit s'annuler par le TVI, ce qui est impossible.

4.

- D'abord, $SO_3(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. En effet, une matrice M de $SO_3(\mathbb{R})$ peut se réduire en $M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}P^T$, où R_θ est une matrice de rotation d'angle θ. Le chemin défini par $M_t = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{t\theta} \end{pmatrix}P^T$ relie $M = M_1$ et $I_3 = M_0$ de manière continue, donc par concaténation de deux chemins on peut relier deux matrices de SO_3 par un chemin continu.

- On sait ensuite que $O_2(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes. En effet $O_2(\mathbb{R}) = SO_2(\mathbb{R}) \cup J\cdot SO_2(\mathbb{R})$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ou n'importe quelle autre matrice de déterminant -1). Par le même raisonnement que précédemment, $SO_2(\mathbb{R})$ est connexe, donc $J\cdot SO_2(\mathbb{R})$ aussi.
- Les composantes connexes de $O_2(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$ sont alors, puisque

$$O_2(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R}) = \left(SO_2(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})\right) \cup \left(J\cdot SO_2(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})\right),$$

$C_1 = SO_2(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$ qui est connexe par produit de deux connexes, et $C_2 = J\cdot SO_2(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$.

5.

a) Montrons que d est une distance ssi Φ est injective.
La positivité est directe, l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x,y,z) \quad d(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq |\Phi(x) - \Phi(z)| + |\Phi(z) - \Phi(y)| = d(x,z) + d(z,y),$$

la symétrie $d(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi(y) - \Phi(x)| = d(y,x)$ s'obtiennent indépendamment de Φ. Pour la séparation, on a $0 = d(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)| \iff \Phi(x) = \Phi(y) \iff x = y$ pour tout x,y si et seulement si Φ est injective.

b) On caractérise $B_d(x_0, r)$, la boule ouverte de centre $x_0 \in \mathbb{R}$ et rayon $r > 0$:

$$y \in B_d(x_0,r) \iff |\Phi(y) - \Phi(x_0)| < r \iff \Phi(y) \in \left]\Phi(x_0) - r, \Phi(x_0) + r\right[$$
$$\iff y \in \Phi^{-1}\left(\left]\Phi(x_0) - r, \Phi(x_0) + r\right[\right)$$

Ainsi $B_d(x_0, r) = \Phi^{-1}\left(\left]\Phi(x_0) - r, \Phi(x_0) + r\right[\right)$.

c) Montrons qu'une CNS est que Φ soit un homéomorphisme.

UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE

CYCLE

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : BOUIN

Prénoms : Emeric

N° GROUPE : VETERAN 1

Numéro de convocation :

ANNÉE : .... SESSION : ....

MATIÈRE : ....

UV = ...

Il est interdit aussi bien de signer à la fin de la composition que d'indiquer son nom ou son numéro sur les feuilles intercalaires.

N° de groupe :

Nombre d'intercalaires : 2/

	Note	Signature	Note finale
1er correcteur			
2e correcteur			

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE

Ne pas écrire dans cette marge

Sujet : sur son image.

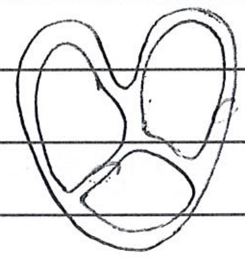
• Déjà, la continuité de Φ montre que pour tout $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe $r' > 0$ telle que si $y \in B_{|\cdot|}(x_0, r')$, alors $|\Phi(y) - \Phi(x_0)| < r$, c'est à dire $y \in B_d(x_0, r)$.

• L'application Φ étant injective, elle est bijective sur son image.

• Comme précédemment écrit pour Φ, la propriété pour tout $r > 0$, $y_0 \in \mathrm{Im}(\Phi)$ il existe $r' > 0$ telle que si $y \in B_d(y_0, r')$, alors $y_0 \in B_{|\cdot|}(y_0, r)$ est équivalente à la continuité de Φ^{-1}.

d) Non. Il a été vu en exemple de cours que $\Phi = \arctan$ ne conduit pas à une distance d complète sur $\mathbb{R}$.

6. La réponse est non.
Traçons deux chemins sur le bretzel de la façon suivante



Par construction, la surface du bretzel privée des deux chemins est connexe. Si la bouée est homéomorphe à la surface, alors son image est connexe sur la bouée canard, ce qui n'est pas le cas, car priver la bouée canard de deux chemins crée deux composantes connexes au minimum.

7. • Les sous variétés de dimension n sont les ouverts de $\mathbb{R}^n$. En effet, V est une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^n$ si il existe pour chaque $x \in V$ un difféomorphisme Φ et un ouvert U voisinage de x dans $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\Phi(U \cap V) = \Phi(U) \cap \{\mathbb{R}^n \times \overbrace{\{0\}}^{\text{dans } \mathbb{R}^0}\}$$
$$= \Phi(U).$$

donc si V est un ouvert, $U = V$ convient avec Φ l'identité, et si un tel (U, Φ) existe alors forcément $U \cap V = U$ et V est un ouvert.

• Les sous-variétés de dimension 0 sont les ensembles discrets puisque dans la définition de sous-variété, $\Phi(U \cap V) = \Phi(U) \cap \{0\} = \{0\}$ est équivalent à dire que tout point de V est isolé.

8. Non. Il suffit de considérer un "huit" privé de son point double, où alors un segment ouvert de $\mathbb{R}$.

9. a. On définit $\varphi(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^4 - 8$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $D\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 4y^3 \end{pmatrix}$.

Le gradient $D\varphi$ est nul ssi $y = 0$ et $4x(x^2-1) = 0$ c'est à dire en $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$, mais ces trois points ne sont pas dans S ~~qui~~ puisqu'ils ne vérifient pas $\varphi = 0$. Ainsi $d\varphi$ est surjective et donc $\{\varphi = 0\} = S$ est une sous-variété, de dimension 1.

b. Par le cours, $T_{(1,\sqrt{3})} S = \operatorname{Ker}(d\varphi_{(1,\sqrt{3})}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12\sqrt{3} \end{pmatrix}^{\perp} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

c. Par le théorème des fonctions implicites, comme $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(2,0) \neq 0$, il existe Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 telle que $\varphi(x,y) = 0$ est équivalent à $x = \Phi(y)$ pour (x,y) près de $(2,0)$.

d. On a par le théorème des fonctions implicites

$$\Phi'(0) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = 0,$$

ce qui est clair puisque Φ est paire au voisinage de 0. On cherche $\Phi(y) = 2 + \alpha y^2 + \beta y^4 + o(y^4)$ au voisinage de 0 :

$$\Phi(y)^4 - 2\Phi(y)^2 + y^4 - 8 = 0 \iff 16\left(1 + \frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\beta}{2}y^4 + o(y^4)\right)^4 - 8\left(1 + \frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\beta}{2}y^4 + o(y^4)\right)^2 + y^4 - 8 = 0$$

$$\iff 16\left(1 + 4\left(\frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\beta}{2}y^4\right) + \frac{3\cdot 4}{2}\left(\frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\beta}{2}y^4 + o(y^4)\right)^2 + o(y^4)\right) - 8\left(1 + 2\left(\frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\beta}{2}y^4\right) + \left(\frac{\alpha}{2}y^2 + \frac{\beta}{2}y^4 + o(y^4)\right)^2 + o(y^4)\right) + y^4 - 8 = 0$$

$$\iff 16\cdot 2(\alpha y^2 + \beta y^4) + 16\cdot 6\cdot\frac{\alpha^2}{4}y^4 - 8\alpha y^2 - 8\beta y^4 - \frac{8\alpha^2}{4}y^4 + y^4 + o(y^4) = 0$$

$$\iff y^2(32\alpha - 8\alpha) + y^4(1 + 32\beta + 24\alpha^2 - 8\beta - 2\alpha^2) + o(y^4) = 0$$

et donc $\alpha = 0$ et $\beta = -\frac{1}{\;}$.

e. On cherche les extremas de $f(x,y) = x^2$ sur la courbe S.

Par les extrema liés, un point critique (x,y) de f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur S, sous-variété de $\mathbb{R}^2$ satisfait

$$Df = \lambda Dg \quad \text{en } (x,y), \text{ pour un}$$

certain multiplicateur de Lagrange λ.

Mais $Df = \lambda Dg \iff \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4x^3 - 4x \\ 4y^3 \end{pmatrix}$

$$\iff 4\lambda y^3 = 0 \quad \text{et} \quad 2\lambda x(x^2-1) = x$$

$$\iff \lambda = 0 \text{ ou } y = 0 \quad \text{et} \quad x = 0 \text{ ou } 2(x^2-1) = \frac{1}{\lambda}$$

Il y a donc comme points critiques

- $x = 0$, $y = \pm 8^{1/4}$ avec $\lambda = 0$.
- $y = 0$, $x = \pm 2$ avec $\lambda = \frac{1}{2}$

On écrit la Hessienne relative en chaque point critique :

$$\mathrm{Hess}(f - \lambda g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\lambda - 12\lambda x^2 & 0 \\ 0 & -12\lambda y^2 \end{pmatrix}$$

- En $(0, \pm 8^{1/4})$ avec $\lambda = 0$, $\mathrm{Hess}(f - \lambda g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est positive dégénérée. On confirme que $(0, \pm 8^{1/4})$ est un minimum puisque $f \geq f(0, \pm 8^{1/4})$ sur S.
- En $(\pm 2, 0)$, avec $\lambda = \frac{1}{2}$, la Hessienne est encore dégénérée, mais comme $x^4 - 2x^2 + y^4 = 8$, $x^4 - 2x^2 \leq 8$, donc $x^2 \leq 4$, c'est à dire $f \leq f(\pm 2, 0)$, et $(\pm 2, 0)$ sont deux points de maximum.

UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE

CYCLE

ANNÉE : .... SESSION : ....

MATIÈRE : ....

UV = ...

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : BOUIN

Prénoms : Emeric

N° GROUPE : VETERAN 1

Numéro de convocation :

Il est interdit aussi bien de signer à la fin de la composition que d'indiquer son nom ou son numéro sur les feuilles intercalaires.

N° de groupe :

Nombre d'intercalaires : 31

	Note	Signature	Note finale
1er correcteur			
2e correcteur			

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE

Ne pas écrire dans cette marge

Sujet : Exercice 2 :

1. La courbe paramétrée est $\mathcal{C}^1$ et on remarque que $x(t+2\pi) = x(t)$ et $y(t+2\pi) = y(t)$. On restreint l'étude à un intervalle de longueur 2π. De plus, $x(t) = x(-t)$ et $y(-t) = -y(t)$ donc on peut étudier la courbe sur $[0,\pi]$ et compléter par symétrie par rapport à l'axe Ox.

On a $x'(t) = 3(-\sin t)\cos^2(t) + \frac{3\sqrt{3}}{8} 2\sin(2t)\cos(2t) \times 2$

$= 3\sin t\cos t\left(-\cos t + \sqrt{3}\cos(2t)\right)$

$= \frac{3}{2}\sin(2t)\left(2\sqrt{3}\cos^2 t - \cos(t) - \sqrt{3}\right)$

On regarde le polynôme $2\sqrt{3}X^2 - X - \sqrt{3}$. $\Delta = 1 - 4\cdot 2\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3}) = 25$!

PARTIE
A
RABATTRE

Ses racines sont alors

$$X_1 = \frac{1+5}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1-5}{4\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On déduit que

$$x'(t) = \frac{3}{2}\sin(2t) \cdot 2\sqrt{3}\left(\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Enfin $y'(t) = 6\sin^2(t)\cos(t)$.

Le tableau de variations est

	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		t_0		π
x'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
x		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
y		$\nearrow$				$\searrow$			
y'	0	$+$			0	$-$			0

puisque $x'(t) = 0$ sur $[0,\pi] \iff t=0,\ t=\frac{\pi}{6},\ t=\frac{\pi}{2},\ t = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = t_0,\ t=\pi$

$y'(t) = 0$ sur $[0,\pi] \iff t=0,\ t=\frac{\pi}{2},\ t=\pi$

On a 3 points singuliers à ~~ét~~ étudier.

* $\underline{t=0}$:

$$x(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)\right)^3 + \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(2t + o(t^2)\right)^2$$
$$= 1 - \frac{3}{2}t^2 + o(t^3) + \frac{3}{2}\sqrt{3}\,t^2 + o(t^3)$$
$$= 1 - \frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)t^2 + o(t^3)$$

$$y(t) = 2t^3 + o(t^3) \quad \Rightarrow \quad M(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}+\frac{3}{2}(\sqrt{3}-1)\\0\end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}t^3 + o(t^3)$$

C'est donc un point de rebroussement de première espèce

* $t = \pi$: Posons $t = \pi + u$

$$x(u) = -\sin^3(u) + \frac{3\sqrt{3}}{8}\sin^2(2u)$$
$$= -u^3 + o(u^3) + \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(4u^2 + o(u^3)\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}u^2 - u^3 + o(u^3)$$

$$y(u) = 2\cos^3(u) = 2\left(1 - \frac{3}{2}u^2 + o(u^3)\right) = 2 - 3u^2 + o(u^3)$$

d'où $\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -3 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} u^3 + o(u^3)$

donc un rebroussement de première espèce.

* $t = \pi$. Posons $t = \pi + u$

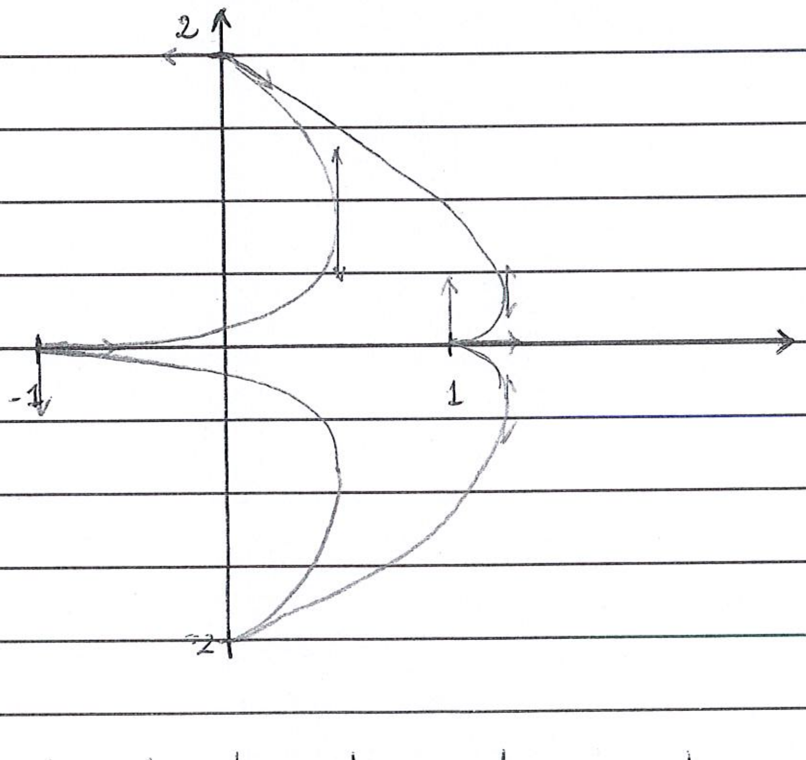
$$x(t) = -\cos^3(u) + \frac{3\sqrt{3}}{8}\sin(2u)^2 = -\left(1 - \frac{3}{2}u^2 + o(u^3)\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}u^2 + o(u^3)$$

$$y(t) = -2\sin^3(u) = -2u^3 + o(u^3)$$

donc $\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}) \\ 0 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} u^3 + o(u^3)$

donc un rebroussement de première espèce.

Tracé :



2. L'équation de la tangente en $t = \frac{\pi}{6}$ est $x = x\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ie

$$x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}\left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{21\sqrt{3}}{32}.$$

. Comme $t \mapsto x(t)$ croît avant $t = \frac{\pi}{6}$ et décroît ensuite, la courbe est à gauche de sa tangente !

3. Non, ce n'est pas une sous variété puisque cette courbe présente des points de rebroussement. Prouvons succintement que en $t=0$ ce n'est pas une sous-variété.
Si γ est un chemin sur Γ (le support) passant par $(1,0)$, alors γ est $\mathcal{C}^1$ et $\gamma(s) = \left(\cos^3(t(s)) + \frac{3\sqrt{3}}{8}\sin^2(2t(s)), 2\sin^3(t(s))\right)$
Nécessairement $\gamma'(s) = 0$ pour $s=0$. Ainsi les vecteurs tangents forment un ev de dimension 0, alors qu'il devrait être de dimension 1.

UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE

CYCLE

ANNÉE : .... SESSION : ....

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : BOUIN

Prénoms : Emeric

N° GROUPE : VETERAN1

Numéro de convocation :

MATIÈRE : ....

UV = ...

Il est interdit aussi bien de signer à la fin de la composition que d'indiquer son nom ou son numéro sur les feuilles intercalaires.

N° de groupe :

Nombre d'intercalaires : 4

	Note	Signature	Note finale
er correcteur			
e correcteur			

APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE

Ne pas écrire dans cette marge

Sujet : Exercice 3

1. On va utiliser le théorème d'inversion locale. En effet, f est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle en tout point est inversible, puisque $\mathrm{Ker}(df_x) = \{0\}$: Si $h \in \mathrm{Ker}(df_x)$, alors $df_x(h) = 0$ et donc $\|h\| = \|df_x(h)\| = 0$, ie $h = 0$.
Les hypothèses sont vérifiées et on déduit que f est un difféomorphisme local en tout point de U.

2. Soit $x_0 \in U$ et $r > 0$ tq $B(x_0, r) \subset U$ (possible car U est ouvert). Par les accroissements finis sur $B(x_0, r)$ qui est convexe,

$$\forall (x,y) \in B(x_0,r)^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \sup_{z \in B(x_0,r)} \|\|df_z\|\| \, \|x-y\|.$$

On $|||df_x||| = \sup\limits_{h\neq 0} \dfrac{\|df_x(h)\|}{\|h\|}$

$= 1$,

d'où le résultat voulu.

3.) a.) Pour tout $x \in U$,

$d(f^{-1})_{f(x)} = (df_x)^{-1}$

donc $\|d(f^{-1})_{f(x)}\| = 1$

par le même argument qu'au dessus, puisque $(df_x)^{-1}$ vérifie aussi $\|df_x^{-1}(h)\| = \|h\|$.

b.) Comme f est un difféomorphisme local, quitte à réduire r, on peut supposer que $f(B(x_0,r))$ est un ouvert et prendre r' tel que $B(f(x_0),r') \subset f(B(x_0,r))$. On applique le théorème des accroissements finis à f^{-1} cette fois sur $B(f(x_0),r')$ qui est convexe:

$$\forall (u,v) \in B(f(x_0),r'), \quad \|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)\| \leq \sup |||df^{-1}|||\ \|u-v\|$$
$$\leq \|u-v\|$$

On en déduit, pour $x,y \in f^{-1}(B(f(x_0),r')) = \Omega_{x_0}$, qui est un voisinage de x_0 contenu dans $B(x_0,r)$, on a

$$\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\| \qquad (Q2)$$

$$\text{et } \|x-y\| = \|f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))\| \leq \|f(x)-f(y)\|,$$

d'où le résultat demandé.

4. a.) La fonction f est différentiable sur Ω_{x_0} et la fonction $x \mapsto \|x\|^2$ aussi sur E, on a alors en différentiant $\|f(x)-f(y)\|^2 = \|x-y\|^2$ par rapport à x: $\forall h \in E \quad 2 \langle f(x)-f(y) \mid df_x(h) \rangle = 2 \langle x-y \mid h \rangle$

puis par rapport à y:

$$\langle df_y(h) \mid df_x(h) \rangle = \langle h, h \rangle = \|h\|^2$$

ce qui est le résultat souhaité

b.) Calculons pour montrer que $x \mapsto df_x$ est constante

$\forall (x,y) \in \Omega_{x_0}^2$, $\|df_x(h) - df_y(h)\|^2$

$$= \|df_x(h)\|^2 - 2 < df_x(h) | df_y(h) > + \|df_y(h)\|^2$$

$$= \|h\|^2 - 2\|h\|^2 + \|h\|^2 = 0,$$

en ayant utilisé l'hypothèse d'isométrie de df et 4a).

5. On fait un raisonnement par connexité. On note $\varphi(x) = df_x$. On définit ensuite $E = \{x \in U \,/\, \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$ pour x_0 fixé dans U. E est fermé puisque l'image réciproque de $\varphi(x_0)$ par φ qui est continue (f est $\mathcal{C}^1$ donc $x \mapsto df_x$ est C^0!). E est ouvert car φ est localement constante par 4b. U est connexe, donc $E = U$ et φ est constante globalement. Comme pour tout x, df_x était orthogonale par définition (c'est une isométrie!), on a $df_x = A \in O_n(\mathbb{R})$ sur U. La connexité de U implique alors à nouveau de $f - Ax$ est constante (car de différentielle nulle), ce qui conclut.

UNIVERSITÉ DE PARIS-DAUPHINE

CYCLE

ANNÉE : .... SESSION : ....

MATIÈRE : ....

UV = ...

Le candidat inscrit ici très lisiblement ses

Nom : BOUIN

Prénoms : Emeric

N° GROUPE : VETERAN1

Numéro de convocation :

Il est interdit aussi bien de signer à la fin de la composition que d'indiquer son nom ou son numéro sur les feuilles intercalaires.

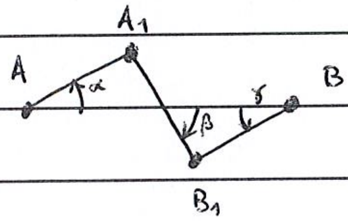
N° de groupe : 51

Nombre d'intercalaires :

	Note	Signature	Note finale	APPRÉCIATIONS EXPLIQUANT LA NOTE
1er correcteur				
2e correcteur				

Ne pas écrire dans cette marge

Sujet : Exercice 4



1.

On écrit l'égalité vectorielle du mécanisme :

$$\vec{AB} = \vec{AA_1} + \vec{A_1B_1} + \vec{B_1B}$$

avec $\vec{AB}\begin{pmatrix} L(3-\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{AA_1}\begin{pmatrix} L\cos\alpha \\ L\sin\alpha \end{pmatrix}$ $\vec{A_1B_1}\begin{pmatrix} L\cos\beta \\ L\sin\beta \end{pmatrix}$

et $\vec{B_1B}\begin{pmatrix} L\cos\gamma \\ L\sin\gamma \end{pmatrix}$, ce qui donne bien

$$\begin{cases} L\cos\alpha + L\cos\beta + L\cos\gamma = L(3-\varepsilon) \\ L\sin\alpha + L\sin\beta + L\sin\gamma = 0 \end{cases}$$

d'où le résultat.

2.) Définissons la fonction

$$\psi(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \end{pmatrix}$$

de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

Montrons que sa différentielle est surjective. Elle s'écrit, pour tout $(\alpha,\beta,\gamma) \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[^3$,

$$d\psi_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha & -\sin\beta & -\sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

Calculons les mineurs de taille 2.

$$\begin{vmatrix} -\sin\alpha & -\sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix} = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta = \sin(\beta-\alpha)$$

$$\begin{vmatrix} -\sin\beta & -\sin\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = \cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma = \sin(\gamma-\beta)$$

$$\begin{vmatrix} -\sin\alpha & -\sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\gamma \end{vmatrix} = \cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma = \sin(\gamma-\alpha)$$

Ces trois mineurs ne peuvent pas être nuls en même temps car la configuration $\alpha=\beta=\gamma\,(=0)$ n'est pas admissible pour $\varepsilon>0$, donc $d\psi$ est de rang 2.

C_ε est donc une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

~~Son espace tangent en (α,β,γ)~~

3. a) On a directement

$F(\alpha,\beta) \leq 1 + 1 + \sqrt{1} = 3 = F(0,0)$ donc F atteint un maximum en $(0,0)$ et il vaut 3.

3b. On a $F(\alpha,\beta) = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2) + 1 - \frac{\beta^2}{2} + o(\beta^2)$

$$+ \left(1 - (\alpha+\beta + o(\alpha^2) + o(\beta^2))^2\right)^{1/2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) + o(\alpha^2+\beta^2) + 1 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta+o(\alpha^2+\beta^2))^2 + o(\alpha^2+\beta^2)$$

$$= 3 - \frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 + o(\alpha^2+\beta^2)$$

$$= 3 \underbrace{- \alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta}_{= \frac{1}{2}(\alpha\ \beta)\,\mathrm{Hess}(F)\binom{\alpha}{\beta}} + o(\|(\alpha,\beta)\|^2)$$

La signature de Hess(F) est donc (0,2) car elle est définie ~~posi~~ négative !

4. a. $(\alpha,\beta,\gamma) \in C_\varepsilon \iff$ ~~$\cos(\gamma) = 3-\varepsilon$~~ $\begin{cases} \cos\gamma = (3-\varepsilon) - (\cos\alpha + \cos\beta) \\ \sin\gamma = -\sin\alpha - \sin\beta \end{cases}$

Comme $\gamma \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{1-(\sin\alpha+\sin\beta)^2}$

donc $(\alpha,\beta,\gamma) \in C_\varepsilon \iff \begin{cases} F(\alpha,\beta) = 3-\varepsilon \\ \gamma = \arcsin(-\sin\alpha - \sin\beta) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\end{cases}$

La dernière fonction est bien de classe $\mathcal{C}^1$ au dessus de $F(\alpha,\beta) = 3-\varepsilon$.

b. Appliquons le lemme de Morse à la fonction F ! Elle est $\mathcal{C}^2$ et sa Hessienne est non dégénérée. Il existe un voisinage V de (0,0) et un difféomorphisme $\varphi = (\varphi_1(\alpha,\beta), \varphi_2(\alpha,\beta))$ tels que si $(\alpha,\beta) \in V$ alors

$$F(\alpha,\beta) = 3 - \varphi_1^2(\alpha,\beta) - \varphi_2^2(\alpha,\beta)$$

Comme (0,0) est le seul point de maximum de F sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^2$, on déduit que $\Gamma_\varepsilon \subset V$ pour ε petit. Ainsi, si ε est suffisamment petit, $(\alpha,\beta) \in \Gamma_\varepsilon$

$$\iff 3-\varepsilon = F(\alpha,\beta) \iff \varphi_1^2(\alpha,\beta) + \varphi_2^2(\alpha,\beta) = \varepsilon,$$

ce qui veut dire que Γ_ε est difféomorphe à un cercle.

c. Comme C_ε est le graphe d'une fonction C^1 au dessus de

Γ_ε, on déduit que Γ_ε et C_ε sont difféomorphes, et donc C_ε est difféomorphe à un cercle pour ε assez petit.