Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Calcul différentiel et optimisation

Examen de janvier 2016

Deux heures — Sans document ni appareil électronique.
Chaque question numérotée sera notée sur environ 4 points.
Les réponses doivent être concises.

1. Dérivée le long d'un chemin. — Soient $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ et $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, tels que $\gamma' = (\partial_2 f \circ \gamma, -\partial_1 f \circ \gamma)$. Montrer que la fonction $f \circ \gamma$ est localement constante.

2. Équation de propagation des ondes. — Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$, de classe C^2 telles que $\partial_x^2 f = \partial_t^2 f$; on pourra utiliser le changement de variables $\varphi : (x,t) \mapsto (u,v) = (x+t, x-t)$.

3. L'équation de degré trois. — Montrer que le lieu des points, dans le plan des (p,q), où l'équation $x^3 + px + q = 0$ ne détermine pas de fonction implicite $x(p,q)$, a pour équation $4p^3 + 27q^2 = 0$. Dessiner ce lieu.

4. Axes principaux d'un ellipsoïde. — Soit q une forme quadratique positive définie sur $\mathbb{R}^n$. Quels sont les extrema de $\|x\|$ sur l'hypersurface d'équation $q = 1$ en fonction des sous-espaces propres de q?

5. Paramétrage d'une hypersurface. — Soient $\varphi : (\mathbb{R}^n, t) \to (\mathbb{R}^{n+1}, a)$ une application de classe C^∞ telle que $\varphi'(t)$ soit de rang n, et $\theta : (\mathbb{R}^n, t) \to \mathbb{R}^{n+1}$ une application C^∞ telle que, pour tout u, $\theta(u)$ soit un vecteur unitaire orthogonal à $\operatorname{Im} \varphi'(u)$. Montrer que l'application $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (t, 0)) \to \mathbb{R}^{n+1}$, $(u,v) \mapsto \varphi(u) + v\theta(u)$ est un difféomorphisme local. En déduire que l'image locale S de φ est une hypersurface dont l'espace tangent en a est $\operatorname{Im} \varphi'(t)$, et que l'application $(\varphi|_S)^{-1} : (S, a) \to (\mathbb{R}^n, t)$ en est un système de coordonnées locales.

6. Distance à une hypersurface. — On reprend les hypothèses de la question 5, en supposant de plus que z est un point fixé de $\mathbb{R}^{n+1}$ et que t est un point critique de la fonction $f : (\mathbb{R}^n, t) \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \|\varphi(u) - z\|^2$. Soient Q_1 et Q_2 les deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ définies par

$$Q_1(\xi) = \|\varphi'(t) \cdot \xi\|^2 \quad \text{et} \quad Q_2(\xi) = (\varphi''(t) \cdot \xi^2) \cdot \theta(t).$$

Montrer que $z - a$ et $\theta(t)$ sont colinéaires, et qu'il existe un réel α tel que

$$f(t + \tau) - f(t) = Q_1(\tau) - \alpha Q_2(\tau) + o(\|\tau\|^2).$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $Q_1^{-1} Q_2$ et sur α pour que t soit un minimum local strict de f.

Solution. —

1. Dérivée le long d'un chemin. — Notons $\gamma = (x, y)$. Par dérivation d'une fonction composée,

$$\begin{aligned}(f \circ \gamma)'(t) &= f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\ &= \begin{pmatrix}\partial_x f(\gamma(t)) & \partial_y g(\gamma(t))\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t)\end{pmatrix} \\ &= \partial_x f(\gamma(t))\, x'(t) + \partial_y f(\gamma(t))\, y'(t) \\ &= \partial_x f(\gamma(t))\, \partial_y f(\gamma(t)) - \partial_y f(\gamma(t))\, \partial_x f(\gamma(t)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

2. Équation de propagation des ondes. — Soient f une fonctions vérifiant l'équation et F la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par ce diagramme:

$$\begin{tikzcd} (x,t) \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, mapsto, "\varphi"] & f(x,t) = F(u,v) \\ (u,v) \arrow[ur, mapsto, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $f(x,t) = F \circ \varphi\,(x,t) = F(x+t, x-t)$,

$$\begin{cases}\partial_x f(x,t) = \partial_u F(x+t, x-t) + \partial_v F(x+t, x-t) \\ \partial_t f(x,t) = \partial_u F(x+t, x-t) - \partial_v F(x+t, x-t),\end{cases}$$

donc (en omettant les arguments)

$$\begin{cases}\partial^2_{xx} f = \partial^2_{uu} F + 2\partial^2_{uv} F + \partial^2_{vv} F \\ \partial^2_{tt} f = \partial^2_{uu} F - 2\partial^2_{uv} F + \partial^2_{vv} F,\end{cases}$$

donc

$$\partial^2_{xx} f(x,t) - \partial^2_{tt} f(x,t) = 4\partial^2_{uv} F(x+t, x-t) = 0 \quad (\forall x, t),$$

donc

$$\partial^2_{uv} F = 0.$$

Donc $\partial_v F$ est une fonction de v (de classe C^1), donc F est de la forme

$$F(u,v) = \varphi(u) + \psi(v),$$

où φ et ψ sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. En conséquence,

$$f(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t).$$

Réciproquement, comme une double dérivation le montre, les fonctions de cette forme sont bien des solutions.

3. L'équation de degré trois. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, p, q) \mapsto x^3 + px + q$. Là où $\partial_x f(x, p, q) \neq 0$, soit $3x^2 + p \neq 0$, on peut résoudre implicitement l'équation $f = 0$ par rapport à x, d'après le théorème des fonctions implicites.

Réciproquement, si

$$f(x, p, q) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x f(x, p, q) = 0, \tag{1}$$

x est une racine double du polynôme $x^3 + px + q$, puisque, d'après la formule de Taylor à l'ordre 3,

$$f(x + \xi, p, q) = 3x\,\xi^2 + \xi^3 = \xi^2(3x + \xi);$$

le reste est nul parce que f est de degré 3 en x. L'ensemble de ces points s'appelle le *contour apparent* de $f = 0$ dans la direction de x, et sa projection sur le plan (p, q) est la *courbe discriminante* de f. L'équation de la courbe discriminante s'obtient en élminant x des équations 1 (on peut élever la première équation au carré et la seconde au cube):

$$4p^3 + 27q^2 = 0.$$

Cette courbe est située entièrement dans le demi-plan $p \leqslant 0$, est symétrique par rapport à l'axe des p, et possède un point de rebroussement en 0. Elle est tracée figure 1.

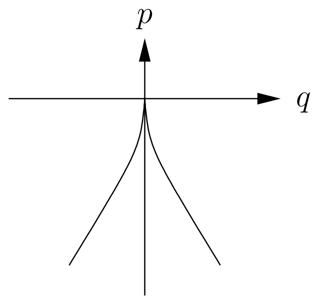

FIGURE 1. Courbe discriminante

4. Axes principaux d'un ellipsoïde. — Posons $f(x) = \|x\|^2$ sur $\mathbb{R}^n$ (ses extremums sont les mêmes que ceux de $\|x\|$, et en plus f est de classe C^∞). La forme quadratique q est homogène de degré 2: $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, donc, en dérivant par rapport à λ en $\lambda = 0$ on voit (formule d'Euler):

$$q'(x) \cdot x = 2q(x).$$

Comme q est définie, la forme linéaire $q'(x)$ est non nulle si $x \neq 0$. Donc q est une submersion en dehors de l'origine. Donc l'ensemble S d'équation $q = 1$, qui ne contient pas l'origine, est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$.

D'après le théorème des extremums liés, si f possède un extremum en un point x de S, il existe $\lambda \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}$ tel que

$$f'(x) = \lambda q'(x),$$

soit

$$x = \lambda Q \cdot x,$$

où Q est la matrice de q dans la base canonique. Autrement dit, x est un vecteur propre de Q associé à la valeur propre $1/\lambda$.

En multipliant à gauche scalairement par ${}^t x$, on voit en particulier que

$$\|x\|^2 = \lambda Q(x) = \lambda,$$

mais peu nous importe ici.

Quitte à faire un changement de bases orthogonal, on peut supposer que

$$\begin{cases} Q(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i x_i^2, \quad 0 < \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \\ f(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i^2, \end{cases}$$

Remarquons que S est donc difféomorphe à la sphère de dimension $n-1$. De plus,

$$\lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 f(x) \leqslant Q(x) \leqslant \lambda_n \|x\|^2 = \lambda_n f(x).$$

En restriction à S,

$$\frac{1}{\lambda_n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\lambda_1}.$$

Le minimum $1/\lambda_n$ est atteint en tout point de S situé sur l'espace propre associé à λ_n (il y en a au moins deux), et uniquement en ces points, et le maximum $1/\lambda_1$ est atteint en tout point de S situé sur l'espace propre associé à λ_1 (il y en a au moins deux aussi), et uniquement en ces points.

5. Paramétrage d'une surface. — Soient V un supplémentaire de $\operatorname{Im} \varphi'(t)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$. L'application

$$F : (\mathbb{R}^n \times V, (t, 0)) \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad (u, v) \mapsto (\varphi(u), v)$$

est un difféomorphisme local en $(t, 0)$ parce que sa dérivée

$$F'(t, 0) = \varphi'(t)\, du + dv\, \theta(t)$$

est de rang $n+1$. Le difféomorphisme F^{-1} redresse S puisque $F^{-1}(S)$ a pour équation $\mathrm{pr}_2(u, v) = v = 0$. Donc S est une surface de $\mathbb{R}^{n+1}$, de dimension n, soit une hypersurface. De plus, la bijection $\mathrm{pr}_1 \circ F^{-1}|_S = (\varphi|_S)^{-1}$ est un système de coordonnées locales. Enfin, on a l'inclusion

$$\operatorname{Im} \varphi'(t) \subset T_a S.$$

Mais comme ces deux sous-espaces vectoriels ont même dimension, ils sont égaux.

6. Distance à une hypersurface. — Comme t est un point critique de f, pour tout $\tau \in \mathbb{R}^n$,

$$0 = f'(t) \cdot \tau = 2(a - z) \cdot (\varphi'(t) \cdot \tau),$$

donc, comme $T_a S = \operatorname{Im} \varphi'(t)$, $a - z$ est orthogonal $T_a S$, donc parallèle au vecteur normal θ: il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$z - a = \alpha\theta.$$

Cherchons maintenant le développement limité de f au second ordre, au point t (comme t est critique, la partie linéaire est nulle). Notons x_1 la projection orthogonale de $x = \varphi(t+\tau)$ sur le plan passant par a et parallèle à T_aS, et x_2 la projection orthogonale de x sur la droite orthogonale, passant par a et dirigée par $\theta(t)$ (voir la figure 2). D'après le théorème de Pythagore, on peut décomposer $f(t+\tau)$ en

$$f(t+\tau) = \|x - z\|^2 = \|x_1 - a\|^2 + \|x_2 - z\|^2.$$

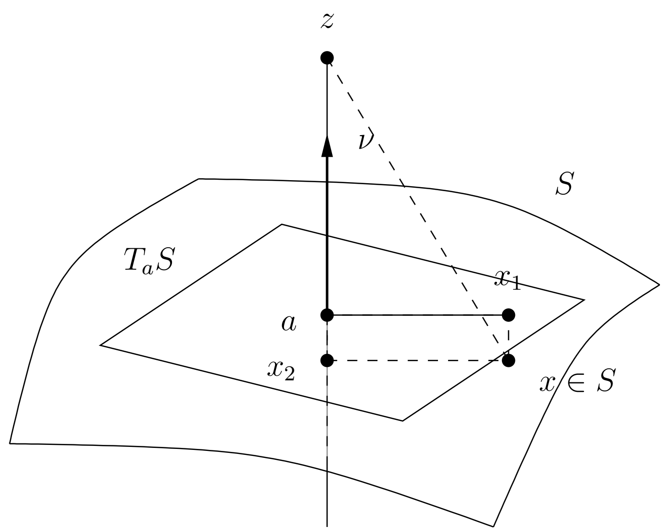

FIGURE 2. Distance à une hypersurface

Or,

$$x = \varphi(t+\tau) = a + \varphi'(t) \cdot \tau + o(\tau),$$

donc

$$x_1 = a + \varphi'(t) \cdot \tau + o(\tau)$$

et le premier terme vaut donc

$$\|x_1 - a\|^2 = \|\varphi'(t) \cdot \tau\|^2 = Q_1(\tau).$$

Évaluons le second terme. Comme x_2, a et z sont alignés sur une droite dirigée par le vecteur $\theta(t)$,

$$\begin{aligned}\|x_2 - z\|^2 &= ((z - x_2) \cdot \theta)^2 \\ &= ((z-a) \cdot \theta(t) - (x_2 - a) \cdot \theta(t))^2.\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}(x_2 - a) \cdot \theta(t) &= (x - a) \cdot \theta(t) \\ &= \left(\varphi'(t) \cdot \tau + \frac{1}{2}\varphi''(t) \cdot \tau^2 + o(\tau^2)\right) \cdot \theta(t) \\ &= \frac{1}{2}(\varphi''(t) \cdot \tau^2) \cdot \theta(t) + o(\tau^2) \\ &= \frac{1}{2}Q_2(\tau) + o(\tau^2),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|x_2 - z\|^2 &= \left(\alpha - \frac{1}{2}Q_2(\tau) + o(\tau^2)\right) \\ &= \alpha^2 - \alpha Q_2(\tau) + o(\tau^2).\end{aligned}$$

Finalement,

$$f(t+\tau) - f(t) = Q_1(\tau) - \alpha Q_2(\tau) + o(\tau^2).$$

Comme $\varphi'(t)$ est injective, Q_1 est définie positive et l'on peut donc diagonaliser la forme quadratique Q_2 dans une base Q_1-orthogonale: si $\tau_1, ..., \tau_{n-1}$ sont les composantes de τ dans cette base, et si $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}$ sont les valeurs propres ordonnées de la matrice diagonale de Q_2 (i.e. ce sont les valeurs propres de $Q_1^{-1}Q_2$), la fonction

$$\frac{Q_2(\tau)}{Q_1(\tau)} = \frac{\sum \lambda_i \tau_i^2}{\sum \tau_i^2}$$

prend toutes les valeurs de l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_{n-1}]$. En conséquence, d'après le lemme de Morse, t est un minimum local strict de

$$f(u) = f(t) + \left(1 - \alpha\frac{Q_2(u-t)}{Q_1(u-t)}\right) Q_1(t) + o(\tau^2)$$

si et seulement si $1-\alpha\lambda_{n-1} > 0$. Les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ s'appellent les rayons de courbure principaux de S; leur somme est la *courbure moyenne* et leur produite la *courbure de Gauss*. La surface S étant fixée, quand z varie le long de la droite $a + \mathbb{R}\theta(t)$, on voit que t est un minimum local strict si et seulement si z est assez proche de a ($\alpha < \frac{1}{\lambda_{n-1}}$).