Université Paris-Dauphine
Calcul Différentiel et Optimisation (L3)
Responsable : Emeric Bouin

Année universitaire 2018-2019
Date : 31 octobre 2018
Durée : 3 heures

Examen partiel

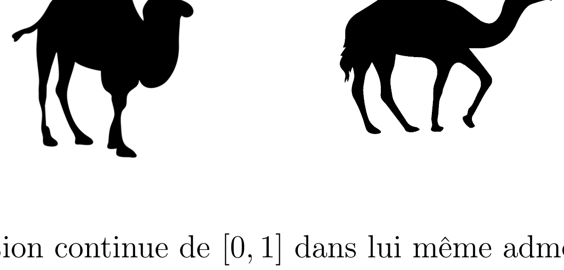
Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice. Le barême est donné à titre indicatif.

Bon courage ! Ramenez la coupe à la maison !

Exercice 1. (Simple, basique ... Avez-vous les bases ? - 10 points - 40 mins)

Répondre aux questions suivantes en prenant soin de tout justifier intégralement mais de manière concise.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{1+n}$ par
$$\varphi(A,x) = \left(\sin\left(\|(A+A^\top)x\|_2^2\right), Ax\right).$$
Montrer que φ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ et calculer sa différentielle.
2. On considère l'application $T : f \mapsto \frac{1}{2}\left(f(0)^2 + f(1)^2\right)$ sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
   (a) L'application T est-elle différentiable sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$? Si oui, quelle est sa différentielle ?
   (b) L'application T est-elle différentiable sur $(E, \|\cdot\|_1)$? Si oui, quelle est sa différentielle ?
3. On considère $E =]-1,0[\cup]0,1[$ muni de la topologie induite par celle de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
   (a) L'ensemble $]0,1[$ est-il ouvert dans E ? Est-il fermé dans E ?
   (b) E est-il connexe ? S'il ne l'est pas, quelles sont ses composantes connexes ?
4. Si une partie est d'adhérence connexe, est-elle nécessairement connexe ?
5. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est-il complet pour $\|\cdot\|_2$, avec $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\|_2 = \left(\sum_{k\geq 0}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$?
6. Soit (X, d_X) un espace métrique. On définit $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions telles que la norme
$$\|f\| := \|f\|_\infty + \sup_{(x,y)\in X^2, x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d_X(x,y)}$$
est finie. Montrer que $(\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
7. Un chameau est-il homéomorphe à un dromadaire ? *(Un argument d'une ligne raisonnablement convaincant suffira.)*



8. Est-il vrai qu'une fonction continue de $[0,1]$ dans lui même admet un point fixe ?

Exercice 2. (Happy Halloween ! ... - 5 points - 30 mins)

On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) - \sin(2t), \\ y(t) = \sin(3t)^2. \end{cases}$$

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée.

Exercice 3. (Quelques homéomorphismes ... - 5 points - 20 mins)

Dans chacun des cas suivants, on demande un homéomorphisme explicite dans le cas positif, une preuve dans le cas négatif.

1. Une astroïde [1] et un carré sont-ils homéomorphes ?
2. La sphère $\mathbb{S}^2$ privée des pôles nord et sud est-elle homéomorphe ...
   (a) au cercle unité $\mathbb{S}^1$?
   (b) au cylindre circulaire $\mathbb{S}^1 \times]-1, 1[$?

Exercice 4. (Prenez vos distances ... - 8 points - 30 mins)

Soit (E, d) un espace métrique. Soit Φ une application définie sur $\mathbb{R}^+$, continue, strictement croissante, nulle en zéro et sous-additive au sens suivant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \qquad \Phi(x + y) \leq \Phi(x) + \Phi(y).$$

On définit sur $E \times E$ l'application δ par $\delta = \Phi \circ d$.

1. (a) Donner deux exemples de telles fonctions Φ.
   (b) Montrer soigneusement que Φ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^+$ dans $\Phi(\mathbb{R}^+)$.
2. Montrer que δ est une distance sur E.
3. Montrer que les distances d et δ définissent la même topologie sur E.
4. Dans cette question seulement, on prend $E = \mathbb{R}$.
   (a) Donner un exemple de distance d et une fonction Φ différente de l'identité telles que d et δ soient équivalentes.
   (b) Montrer que d et δ ne sont pas toujours des distances équivalentes.
5. Montrer que (E, δ) est complet si et seulement si (E, d) l'est.

Exercice 5. (Chacun ses fixettes ... - 6 points - 30 mins)

On cherche à montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ est suffisamment petit, alors le problème

$$\begin{cases} f'(x) = f(x - x^2)^2, \quad x \in [0, 1], \\ f(0) = \alpha, \end{cases} \tag{$\star$}$$

admet une solution f de classe $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. On note E l'espace $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

1. C'est le support de la courbe paramétrée $x(t) = \cos(t)^3, y(t) = \sin(t)^3$, pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que
$$T : f \mapsto \left(x \mapsto \alpha + \int_0^x \left[f(s - s^2) \right]^2 \, ds \right)$$
définit un opérateur sur E, et qu'un point fixe de cet opérateur est solution du problème.
2. (a) L'opérateur T est-il contractant sur $(E, \| \cdot \|_\infty)$?
   (b) Soit $R > 0$. Montrer que si $2R < 1$ alors T est contractant sur la boule fermée $\overline{B}(0, R)$ de $(E, \| \cdot \|_\infty)$.
3. Donner une condition liant α et R pour que la boule fermée $\overline{B}(0, R)$ de $(E, \| \cdot \|_\infty)$ soit stable par T.
4. Construire une solution au problème $(\star)$.

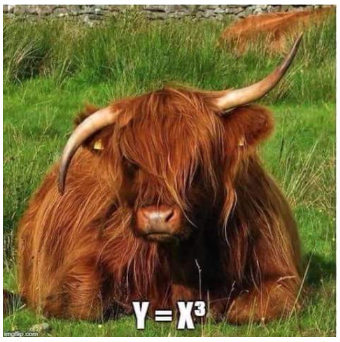
Exercice 6. (Last deal à temps ... - 6 points - 30 mins)

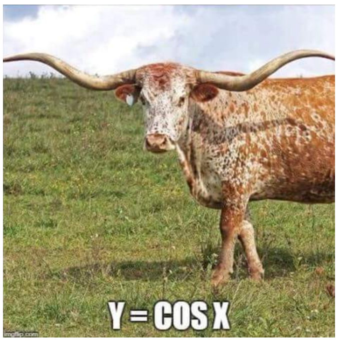
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit une application $f : E \mapsto E$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant
$$\forall x \in E, \ \forall h \in E, \ \langle df_x(h), h \rangle \geq \alpha \|h\|^2,$$
pour un certain $\alpha > 0$.

1. (a) L'application linéaire df_x est-elle inversible pour chaque $x \in E$?
   (b) Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en tout point de E.
   (c) Montrer que $f(E)$ est ouvert.
2. (a) Montrer pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x) - f(y) | x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$.
   (b) Montrer que $f(E)$ est fermé.
3. Montrer que f est surjective.

Bonus. (Un peu vache ... - 2 points hors barème)

Compléter la frise suivante.





?

$x(t) = \sin(t)$
$y(t) = \sin(t)\cos(t)$