Révisions (feuille 0) : continuité d'applications

1 Applications linéaires continues

Exercice 1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés **de dimension finie** et $f : E \mapsto F$ une application linéaire. Montrer que f est continue. Les *deux* espaces E et F doivent-ils être simultanément de dimension finie pour assurer cette propriété ?

Exercice 2. Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n. et f une forme linéaire sur E. Montrer que f est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)$ est fermé.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que pour $f \in E$ on a

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

Les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 4. Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_E) \to (F, N_F)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_2) \to (F, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k \geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k \geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.

Exercice 5. *(Inégalité de Hardy)*

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \|f\|_2 := \left(\int_\mathbb{R} |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \right\}$. On note g la moyenne de f entre 0 et x,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \, dt \text{ si } x \neq 0, \qquad g(0) = f(0).$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^x g(t)^2 \, dt = 2 \int_0^x f(t)g(t) \, dt - xg(x)^2.$$
2. En déduire que, pour $x \geq 0$,
$$\left(\int_0^x g(t)^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left(\int_0^x f(t)^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$
3. L'application de E dans lui même qui a f associe g est-elle bien définie ? Est-elle continue ?
4. Quelle est la norme de $f \mapsto g$? *On pourra considérer* $f_a(x) = \min(1, |x|^{-a})$, *pour* $a > \frac{1}{2}$.

Exercice 6. Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on pose

$$\|f\|_1=\int_0^1 |f(t)|dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur E. Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x)=\int_0^x f(t)dt.$$

1. Démontrer que ϕ est continue.
2. Pour $n\geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x)=ne^{-nx}$, $x\in[0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
3. On pose $|||\phi|||=\sup_{f\neq 0_E}\frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $|||\phi|||$.

Exercice 7. Soit E un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire.

1. Soit $a\in E$. Démontrer que f_a définie par $f_a(x)=\langle x,a\rangle$ est continue.
2. En déduire que l'orthogonal de toute partie de E est un fermé de E.

Exercice 8. Soit E l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n\geq 1}|a_n|$ converge. On pose, pour $a=(a_n)\in E$,

$$\|a\|=\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
2. On pose $F=\{a\in E;\ \sum_{n\geq 1}a_n=1\}$. F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

2 Continuité de fonctions de plusieurs variables

Exercice 9. Soit $(E,\|.\|)$ un $\mathbb{R}$-e.v.n.. Montrer que $x\mapsto\|x\|$ est continue.

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

$$f_1(x,y)=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2},\qquad f_2(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\qquad f_3(x,y)=-4xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

$$f_4(x,y)=\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad f_5(x,y)=\frac{x-\sin(x)}{x^2+y^2},\qquad f_6(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^4},$$

$$f_7(x,y)=(x^2+y^2)^a\sin\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

pour $(x,y)\neq(0,0)$, et $f_i(0,0)=0$ pour $i=1,...,7$.

Exercice 11. On définit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 12 (Partiel L2 2018)**.** La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule ci-dessous est-elle continue en $(0,0)$?

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+|xy|)-|xy|}{(x-y)^2+x^6} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } x=y=0.\end{cases}$$

Exercice 13. Soit f la fonction définie sur $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\neq y\}$ par $f(x,y)=\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}$.
Montrer que l'on peut prolonger f par continuité sur la diagonale $x=y$.