
Feuille 1 : Courbes paramétrées

Without geometry, life is pointless ...

Exercice 1. Quel est la nature du point de paramètre $t = 0$ pour les arcs paramétrés suivants ?

$$t \mapsto (t + 2t^2 - t^3, t + 2t^2 - t^7) \qquad t \mapsto (-t + t^2, t^2 + t^3)$$
$$t \mapsto (-t^2 - 2t^3, -t^3 - t^5) \qquad t \mapsto (t^2 + 3t^3 + t^4, -2t^2 - 6t^3 + t^4).$$

Exercice 2. Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \dfrac{\cos^2(t)}{2 - \cos(t)} \end{cases}.$$

On précisera le comportement au voisinage des points singuliers.

Exercice 3. Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3 - t}{2t - 1} \\ y(t) = tx(t) \end{cases}.$$

On précisera les points doubles, les inflexions, les données relatives à l'asymptote et aux branches paraboliques.

Exercice 4. Etudier les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \, \sin t \\ y(t) = \cos^2 t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 3\cos t + 2\cos(3t) \\ y(t) = 3\sin t - 2\sin(3t) \end{cases}$$

Exercice 5. Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t - 1} \end{cases}.$$

On précisera les points doubles, les inflexions, les données relatives à l'asymptote et aux branches paraboliques. Montrer par ailleurs que les tangentes au point double sont orthogonales.

Exercice 6. Etudier la courbe paramétrée suivante :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t^3 - 1} \\ y(t) = \dfrac{2t}{t^3 - 1} \end{cases}.$$

Montrer de plus :

1. Que les points de paramètres t, u, v sont alignés si et seulement si

$$tuv = t + u + v + 1.$$

2. Que $\mathcal{C}$ admet exactement trois points d'inflexion et qu'ils sont alignés.

Exercice 7. Etudier la courbe paramétrée suivante : $\begin{cases} x(t) = t - \text{th}(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\text{ch}(t)} \end{cases}$. Soit $T(t)$ un point de la courbe d'abscisse positive, et M le point d'intersection de la tangente à la courbe au point T avec (Ox). Montrer que MT est constante.

Exercice 8. Tracer l'arc paramétré

$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 4t^3 \end{cases}.$$

Trouver les droites à la fois tangentes et normales à l'arc.

Exercice 9. Etudier la courbe paramétrée suivante : $t \mapsto \left(t + \frac{1}{t}, t + \frac{1}{2t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$. On étudiera en particulier la position par rapport aux asymptotes, et la tangente aux points stationnaires.

Exercice 10. Déterminer l'enveloppe de la famille de droite $(\mathcal{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ définie par l'équation cartésienne

$$t^3(x-1) + 3tx - 2y = 0.$$

Exercice 11. Soit C le point de coordonnées $(0,1)$ et M un point courant de l'axe des abscisses. On considère la famille de droites constituées par les droites orthogonales à CM, lorsque M décrit l'axe des abscisses. Quelle est l'enveloppe de cette famille de droites ?

Exercice 12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Trouver les courbes qui intersectent toutes les droites passant par l'origine avec un angle α.

Exercice 13. Soit $c : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ un chemin dans le plan, de classe C^2. La *longueur* de c est

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} \|c'(t)\|\, dt.$$

1. Montrer que $L(c)$ est invariant par changement de paramétrage (on fera des hypothèses plausibles sur le "changement de paramétrage").
2. Supposons que $t \in]t_0, t_1[$ soit un point régulier ($c'(t) \neq 0$). Le *vecteur tangent unitaire* est

$$\tau(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|},$$

et le *vecteur normal unitaire* est le vecteur $\nu(t)$ obtenu à partir du précédent par une rotation de $\pi/2$. La *(droite) normale* est la droite passant par $c(t)$ et dirigée par le vecteur normal unitaire.

(a) Montrer que généralement les normales en t et en s se coupent en un point unique, et que ce point a une limite quand s tend vers t. On appelle *centre de courbure* et l'on note $C(t)$ cette limite.

(b) Déterminer le nombre $R(t) \geq 0$, appelé le *rayon de courbure*, tel que $C(t) = c(t) \pm R(t)\nu(t)$. La *courbure* est $1/R(t)$.

(c) Le chemin C est la *développée* de c et, inversement, c est la *développante* de C. Trouver la développée de $c(t) = (3t - t^3, 3t^2)$.