Feuille 2 : différentiabilité

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé et N_1 et N_2 deux normes sur E, équivalentes. Montrer qu'une application f est différentiable sur (E, N_1) si et seulement si elle l'est sur (E, N_2).

Exercice 2. Une fonction de deux variables à valeurs réelles admettant en tout point une dérivée directionnelle dans toutes les directions est-elle continue ?

Exercice 3. On suppose que f est différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Dériver la fonction $u(x) = f(x, -x)$ et calculer la différentielle de l'application $g(x, y) = f(y, x)$.

Exercice 4. Montrer que la fonction $f : t \mapsto (e^t, \sin t, \cos t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5. Soit $f(x, y) = (x^2 + y^4)^{1/3}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Calculer les dérivées partielles premières de f en un point $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles au point $(0, 0)$?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^3}{x^2 + |y|} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $df_{(0,0)}(h, k)$ existe pour tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ mais que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 7. Soient $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ deux applications différentiables. Montrer que

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x + g(x,y)) \end{pmatrix}.$$

est différentiable et calculer sa différentielle en chaque point.

Exercice 8. Soient les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = x^\alpha y^\beta \quad (\alpha > 0, \beta > 0), \qquad g(x,y) = x^y,$$
$$h(x,y) = \exp(xy)\ln(1 + x^2 + y^2), \qquad k(x,y) = \frac{y\sin(xy)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Montrer que les domaines de ces fonctions sont des ouverts, que ces fonctions sont différentiables sur leurs domaines, et calculer leurs gradients.

Exercice 9. Soit $\alpha > 0$. L'application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right),$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$ est-elle différentiable ? de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 10. On se place sur $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme $\|\cdot\|$. Calculer la différentielle des applications suivantes (en un point quelconque) :

1. $x \mapsto \|x\|$,
2. $x \mapsto \|x\|^2$,
3. $x \mapsto Ax$,
4. $x \mapsto x^\top Ax$.

Exercice 11. Calculer la différentielle des applications suivantes (en un point quelconque) :

1. $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^2$.
2. $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tMM$.
3. $GL_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto M^{-1}$.

Exercice 12.

1. Montrer qu'une norme sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas différentiable en 0.
2. Montrer que la norme $\|\cdot\|_2$ est différentiable en dehors de 0 et calculer son gradient.
3. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles différentiables en dehors de l'origine ?

Exercice 13. Soit K l'espace vectoriel des suites réelles à support fini i.e. pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K, il existe $N > 0$ tel que $x_n = 0$ pour $n > N$.

1. Montrer que K est un espace vectoriel de dimension infinie.
2. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ sont-elles équivalentes sur K ?
3. On définit $L : K \mapsto \mathbb{R}$, l'application telle que $L(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
   (a) Montrer que L est bien définie.
   (b) Etudier la différentiabilité de L lorsque K est muni de $\|\cdot\|_\infty$ puis de $\|\cdot\|_1$.

Exercice 14. Soient $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme

$$E \ni f \to \|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

et

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \Phi(f) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \Psi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \Psi(f) \end{array}$$

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f^2(s)\,ds, \qquad \Psi(f)(x) = \sin(f(x)) .$$

1. Expliquer pourquoi $\Phi(f), \Psi(f) \in E$.
2. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$$|\sin(x+y) - \sin(x) - y\cos(x)| \leq y^2.$$
3. Montrer que Ψ est différentiable sur E et déterminer la différentielle $D\Psi(f)$ pour f dans E.
4. Montrer que Φ est différentiable sur E et déterminer la différentielle $D\Phi(f)$ pour f dans E.
5. Déterminer la différentielle $D(\Phi \circ \Psi)(f)$ pour f dans E.

Exercice 15. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$, telle que $f(M) = \det(M)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Calculer sa différentielle en tout point, en commençant par le faire en l'identité, puis en une matrice inversible. *On pensera à l'exprimer en fonction d'une comatrice.*
3. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de M. Exprimer le coefficient d'ordre 1 du polynôme χ_M en fonction des cofacteurs de la matrice M.

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable et

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (f(x,y), 2xy) \end{array} \right).$$

Déterminer f de sorte que $d\phi_{(x,y)}$ soit une similitude pour tout (x,y).

Exercice 17. Soient E et F deux espaces de Banach. On appelle $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On dit que f est un isomorphisme de E dans F si f est bijective et si son inverse $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$. On appelle $\mathrm{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F.

1. Soient $h_1 \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $h_2 \in \mathcal{L}_c(F,E)$. Montrer que

$$\|h_2 \circ h_1\| \leq \|h_2\|\|h_1\|$$

2. Soit $g \in \mathcal{L}(E,E)$. On suppose que $\|g\| < 1$.
   (a) Montrer que la série de terme général $g^{(n)}$ converge absolument.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer $(\mathrm{Id} - g)\left(\sum_{n=0}^m g^n\right)$ et $\left(\sum_{n=0}^m g^n\right)(\mathrm{Id} - g)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Id} - g$ est un isomorphisme.
3. Soit $f \in \mathrm{Isom}(E,F)$. Soit $h \in \mathrm{Isom}(E,F)$. Donner une condition suffisante pour que $f + h$ soit un isomorphisme. En déduire que $\mathrm{Isom}(E,F)$ est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E,F)$.
4. On considère maintenant l'application

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(E,F) & \longrightarrow & \mathrm{Isom}(F,E) \\ f & \longmapsto & f^{-1} \end{array} \right).$$

   (a) Montrer que ϕ est différentiable et calculer $d\phi_f$ pour tout $f \in \mathrm{Isom}(E,F)$.
   (b) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 18. On munit $\mathbb{R}^2$ de la nome euclidienne et l'espace des matrices carrées de la norme opérateur.

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

   avec $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer la norme de A.
2. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ par

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$$

   Ecrire la matrice jacobienne de f et calculer sa norme.
3. Montrer que l'application linéaire $df_{(x,y)}$ conserve les angles dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19. Sur quelle partie D de $\mathbb{R}^3$ la fonction

$$f : (x,y,z) \mapsto \arccos\left(\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}\right) + \arccos\left(\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right) + \arccos\left(\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}\right)$$

est-elle définie ? Montrer que f est constante lorsque x, y, z sont strictement positifs. Interpréter le résultat.

Exercice 20. On considère l'application f définie par :

$$f(x,y,z) = \left(\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}, xy\exp(z), x^2+y^3+4z\right).$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est différentiable sur son domaine et calculer sa matrice jacobienne en tout point du domaine.
3. Calculer la norme de $J_f(x)$ en $x = (1,1,0)$ pour $\mathbb{R}^3$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ puis de la norme $\|.\|_1$.

Exercice 21. 1. Soit une application différentiable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et soit une application différentiable $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Montrer que l'application $u = f \circ \phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ résout l'équation

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

2. Etant donné une application différentiable $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, trouver une solution u de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \sin x\,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$

telle que $u(0,y) = g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 22. Soit $c \in \mathbb{R}$.

1. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$, de classe C^1 vérifiant l'*équation de transport*

$$\partial_t f + c\partial_x f = 0.$$

2. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto f(x,t)$, de classe C^2 vérifiant l'*équation de propagation des ondes*

$$\partial_{tt} f - c^2 \partial_{xx} f = 0.$$

Exercice 23. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$: $U = \{(x,y) \text{ tq } x > 0,\ y > 0\}$, et $b \in \mathbb{R}$. Trouver $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ vérifiant :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = b.$$

On utilisera le changement de variable : $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$, ou alors le passage en coordonnées polaires.

Exercice 24. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $y\partial_x f - x\partial_y f = 2f$. On pose $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Trouver f

1. Si $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Si $U = \mathbb{R}$.

Exercice 25. Soit f une fonction positivement homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une fonction telle que $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i} f(x) = \alpha f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2. Soit $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \Omega, \qquad x\partial_x f + y\partial_y f = \alpha f.$$

On étudiera $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

Exercice 26. Soient $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction nulle en 0 et $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire, toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Trouver l'expression de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$-y\,\partial_x f(x,y) + x\,\partial_y f(x,y) = g(x,y) \quad \text{et} \quad f(x,0) = f_0(x) \quad (\forall x, y),$$

en supposant qu'elle existe ; on pourra chercher f en coordonnées polaires (r, θ) (avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

2. Cette solution existe-t-elle si $g \equiv 1$?
3. Si $g(x,y) = xy$ (sans omettre de vérifier le caractère $\mathcal{C}^1$ de f) ?

Exercice 27. Déterminer les fonctions $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2+x}{y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2+y}{x}$.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1-y}{(x+y+1)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2+x}{(x+y+1)^2}$.
3. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$.
4. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - \dfrac{x}{y^2}$.

Exercice 28. Soit la fonction g définie par $g(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles premières de g au point $(0,0)$.
3. Déterminer les fonctions dérivées partielles premières de g. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 29 (Formule de Liouville)**.**

1. Soient $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une fonction continue, et $x_1, ..., x_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des solutions de l'équation différentielle linéaire

$$x'(t) = A(t)\,x(t).$$

Montrer que le *(déterminant) wronskien* (aussi appelé *(déterminant) jacobien*)

$$w(t) = \det(x_1(t), ..., x_n(t))$$

vérifie l'équation différentielle linéaire

$$w'(t) = \mathrm{tr}A(t)\,w(t);$$

2. Soient maintenant $v : (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1 et (φ_t) son flot, c'est-à-dire que, pour tout x proche de a, $t \mapsto \varphi_t(x)$ est l'unique solution maximale du problème de Cauchy

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t(x)) = v(\varphi_t(x)), \quad \varphi_0(x) = x.$$

Montrer que

$$\frac{d}{dt}\det(\varphi_t')(x)\Big|_{t=0} = \mathrm{div}\,v(x),$$

avec

$$\mathrm{div}\,v(x) = \mathrm{tr}v'(x) = \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$$

(*divergence* de v en x).

3. À quelle condition sur son champ de vecteurs vitesse un fluide est-il incompressible ?