Chapitre 4 : Suites et séries de fonctions

1 Convergence simple et uniforme de suite de fonctions

Exercice 1. Donner un exemple de suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ mais pas uniformément.

Exercice 2. Etudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions (f_n) dans chacun des cas suivants.

$$(i)\ f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}, \qquad (ii)\ f_n(x) = n^2x^{2n}(1-x).$$

Exercice 3. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par,

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = x^n \ln\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right).$$

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Exercice 4. Soit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 5.

1. Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1+n^\alpha e^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}_+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
3. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$$

Exercice 6. Soit $f_n(x) = \frac{e^{nx}+2}{e^{nx}+1}$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$. Expliciter sa limite simple.
2. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. La convergence est-elle uniforme sur $[1,+\infty[$?

Exercice 7. Soit $f_n(x) = (1+x^n)^{\frac{1}{n}}$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.
2. En déduire que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.
3. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f aussi sur $[1,+\infty[$ et conclure.

Exercice 8. Soit $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^x$.

2. Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, A]$, quel que soit $A > 0$.
3. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 9. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \text{ si } x \in [0, n], \\ 0 \text{ si } x > n. \end{cases}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction e^{-x}.
2. (a) Soit, pour tout $x \geq 0$, $h(x) = xe^{-x}$. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$|h(x)| \leq e^{-1}.$$

   (b) Pour $n > 1$, on pose

$$g_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n, \text{ si } x \in [0, n], \\ e^{-x} \text{ si } x > n. \end{cases}$$

   Montrer que, pour tout $x \in [0, n]$, $g_n'(x) = e^{-x} h_n(x)$, avec

$$h_n(x) = -1 + e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}.$$

   (c) Calculer $h_n'(x)$, pour $x \in [0, n]$. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in [1, n]$ tel que

$$g_n'(\alpha_n) = 0; \qquad \forall x \in [0, \alpha_n[,\ g_n'(x) > 0; \qquad \forall x \in]\alpha_n, n],\ g_n'(x) < 0.$$

   d) Montrer que $g_n(\alpha_n) = \frac{1}{n}\alpha_n e^{-\alpha_n}$ et donner le tableau de variation de g_n sur $\mathbb{R}^+$.

   e) En déduire que (f_n) converge uniformément vers e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx.$$

Exercice 10. On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0, 1]$ par,

$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, et pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{nx + 1}.$$

3. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[\varepsilon, 1]$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. Converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

Exercice 11. On note $I = [0, \frac{1}{2}]$. Le but de l'exercice est de construire une application continue $f : I \to \mathbb{R}$, telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(f(t) + f(t^2)\right) dt.$$

On considère les applications $f_n : I \to \mathbb{R}$ définies par récurrence :

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, \quad \forall x \in I, \\ f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(f_n(t) + f_n(t^2)\right) dt. \end{cases}$$

1. Calculer f_1 et f_2. Montrer que, pour tout entier n, f_n est un polynôme.
2. On note, pour $n \geq 1$,
$$D_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|.$$
Calculer D_1 et D_2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I, \quad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n,$$
et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$D_n \leq \frac{1}{2^n}.$$
3. On pose $u_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x)$.
   (a) Soit x fixé dans I. Montrer que la série numérique $\sum_k u_k(x)$ est absolument convergente.
   (b) On note, pour tout $x \in I$, $S(x) = \sum_{k \geq 1} u_k(x)$. En remarquant que
   $$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = f_n(x) - 1,$$
   montrer que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction que l'on notera f. Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de $S(x)$.
4. Montrer que, pour tout $x \in I$, et pour tout $p > n$,
$$|f_p(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{p} u_k(x) \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$
En déduire que (f_n) converge uniformément sur I vers f, et que f répond à la question posée.

Exercice 12. Soit $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions pour laquelle il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est "K-lipschitzienne", c'est-à-dire :
$$\forall x, y \in [a,b], \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq K|x - y|.$$

On suppose de plus que (f_n) converge simplement vers une certaine fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer cette convergence est uniforme.

Exercice 13. (Deuxième théorème de Dini) Soit $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions croissantes, qui converge simplement vers une fonction f. On suppose de plus que f est continue. Montrer que (f_n) converge uniformément vers f.

2 Modes de convergence de séries de fonctions

Exercice 14. Soit, pour n entier, et pour $x \in]-1,1[$, $u_n(x) = nx^n$. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ et uniformément sur tout intervalle de la forme $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ vers une fonction u à déterminer.

Exercice 15. Montrer que
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$$
est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 16. Soit $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}$.

1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Soit u sa fonction somme. En déduire la continuité de la fonction u sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u'(x) = -2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+x^2)^2}.$$

Exercice 17. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2}$.

Exercice 18. Soit $\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Soit u sa limite. Calculer la limite de $u(x)$ lorsque x tend vers 0.
3. Prouver que

$$\int_0^\pi u(x)\,dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

   On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$. En déduire $\int_0^\pi u(x)\,dx$.
4. Montrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Exercice 19. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on pose

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$$

sous réserve de convergence.

1. Démontrer que S converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n} \frac{xe^{-kx}}{\ln k}$. Démontrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{\ln(n)} \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}},$$

   et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
5. Montrer que S n'est pas dérivable à droite en 0.
6. Montrer que $x^k S(x)$ tend vers 0 en $+\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 20. On appelle fonction ζ de Riemann la fonction de la variable $s \in \mathbb{R}$ définie par la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. Donner le domaine de définition de ζ et démontrer qu'elle est strictement décroissante sur celui-ci.

2. Prouver que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et écrire l'expression de sa $k-$ième dérivée.
3. Montrer que
$$\forall s > 1, \qquad \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1.$$
En déduire que $\zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1}$.
4. Déterminer $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s)$.
5. Démontrer que ζ est convexe.
6. Démontrer que $\ln(\zeta)$ est convexe.

Exercice 21. Soit
$$\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que
$$\forall x > 0, \qquad \frac{\pi}{2} \leq S(x) \leq \frac{\pi}{2} + x.$$
En déduire que S admet des limites à droite et à gauche en 0, mais n'y est pas continue.
4. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 22. Soit $-1 < a < 1$. On considère la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad u_n(t) = (\cos t)^n a^n.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. On pose $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt$, l'intégrale de Wallis. Rappeler sa valeur en fonction de n.
3. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n a^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1-a\cos(t)}.$$
4. (a) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n W_n = 1$.

   (b) Quelle est la limite de $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n a^n$ lorsque a tend vers 1^- ? Donner un equivalent de $\sum_{n=0}^{+\infty} W_n a^n$ lorsque a tend vers 1^-.

Exercice 23. Soit $(f_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $(g_n) : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux suites de fonctions. On suppose que la série de terme général f_n est uniformément convergente. On suppose d'autre part que la suite (g_n) est uniformément bornée, c'est-à-dire :
$$\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ |g_n(x)| \leq M,$$
et telle que pour tout x, la suite $(g_n(x))$ est croissante.

Montrer que la série de terme général $f_n g_n$ est uniformément convergente.