
FEUILLE 4 : LE THÉORÈME DU POINT FIXE

Exercice 1. Soit (M, d) un espace métrique complet et f une application de M dans M . Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série de terme général $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On suppose que pour tout n , la fonction $f^{(n)}$ (c'est à dire f itérée n fois) est Lipschitzienne de rapport λ_n .

1. Montrer qu'il existe un unique point fixe a pour f et que toute suite $(f^{(n)}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a .
2. Estimer la vitesse de convergence.

Exercice 2. On note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit f une application contractante (pour d) de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) := x + f(x).$$

Montrer que g est bijective.

Exercice 3. On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x, y) = (\cos(x) - \sin(y), \sin(x) - \cos(y)).$$

1. Choisir une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\|dF_{(x,y)}\| \leq \sqrt{2}$.
2. En déduire que la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2} (\cos(x_n) - \sin(y_n)), \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} (\sin(x_n) - \cos(y_n)). \end{cases}$$

converge pour tout (x_0, y_0) .

3. Donnez l'équation que vérifie sa limite. La limite dépend-elle du point de départ (x_0, y_0) ?

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2 < 1$.

1. En utilisant le théorème du point fixe de Picard, montrer que pour tout $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, le système

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i - \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i$$

admet une unique solution.

2. En utilisant le théorème du point fixe de Banach, montrer que pour tout $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, le système

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_i - \sum_{j=1}^n \sin(a_{i,j} x_j) = b_i$$

admet une unique solution.

Exercice 5. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe une unique fonction continue f sur $[0, 1]$ vérifiant pour tout $x \in [0, 1]$:

$$f(x) = \sup_{y \in [0, 1]} (\cos(x^2 - y^2) + \alpha f(y)).$$

Exercice 6. On munit l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^+$, i.e. $E = \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, de la norme uniforme. On se donne une fonction $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, continue et globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, c'est à dire

$$\exists M > 0, \quad \forall ((t, x), (t, y)) \in (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})^2, \quad |f(t, x) - f(t, y)| \leq M|x - y|.$$

Soit $T > 0$, on s'intéresse au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in]0, T[, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

pour $y_0 \in \mathbb{R}$. On définit l'opérateur $\mathcal{F}$ de E sur E par

$$\forall t \in [0, T[, \quad \mathcal{F}(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est bien défini.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'application $\mathcal{F}^{(p)}$ est Lipschitzienne, et que pour p suffisamment grand, dépendant seulement de T , elle est contractante.
3. Montrer que pour tout $T > 0$, existe un unique élément $y \in E$ tel que $\mathcal{F}(y) = y$.
4. Montrer que y est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie sur $[0, T[$ l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

5. Peut-on choisir $T = +\infty$ dans ce résultat ?

Exercice 7 (J.-C. Yoccoz). Soit (x_n) une suite réelle définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et

$$x_{n+1} = x_n^2 - 100 + \sin n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

On veut montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que (x_n) soit bornée à valeurs positives.

1. Montrer que, si (x_n) est bornée, pour tout n on a $10 \leq x_n \leq 11$.
2. Soient X l'ensemble des suites réelles (y_n) de $[10, 11]$, d la distance

$$d((y_n), (z_n)) = \sup_n |y_n - z_n|$$

et F l'opérateur

$$F : X \rightarrow X, \quad (y_n) \mapsto (z_n), \quad z_n = \sqrt{100 - \sin n + y_{n+1}}.$$

Vérifier que F est bien défini. Quelle est son rapport de Lipschitz ?

3. Conclure. On donnera une estimation de l'unique point fixe (a_n) de F .