Feuille 5 : Homéomorphismes et difféomorphismes

Exercice 1. (Cours)

1. Montrer que si $f : E \mapsto F$ est un homéomorphisme, alors pour toute partie A de E, on a
$$f\left(\mathrm{Int}(A)\right) = \mathrm{Int}\left(f(A)\right), \qquad f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$
2. Montrer que "être une suite de Cauchy" n'est pas invariant par homéomorphisme.
3. Montrer que "être borné" n'est pas invariant par homéomorphisme.

Exercice 2.

1. Classer les lettres de l'alphabet (en majuscule) par classes d'homéomorphismes.
2. Le symbole ∞ est il homéomorphe à un cercle ?
3. Une droite est-elle homéomorphe à un plan ?
4. Un tore à un trou est-il homéomorphe à un tore à deux trous ? *(On fera des dessins.)*

Exercice 3. Soit $f : U \to V$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans un ouvert V de $\mathbb{R}^q$. On suppose que f est différentiable en a et que f admet une fonction réciproque g, différentiable au point $b = f(a)$. Démontrer que $p = q$.

Exercice 4.

1. Un homéomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ est-il un difféomorphisme ?
2. Trouver un difféomorphisme explicite de $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ qui envoie une sphère sur une ellipse (non dégénérés).
3. Tous les intervalles réels ouverts non vides sont-ils difféomorphes ? Si oui, précisez un difféomorphisme.
4. La boule unité ouverte de $\mathbb{R}^n$ est-elle difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ tout entier ? On pourra étudier la fonction $x \mapsto \tanh(\|x\|) \cdot \frac{x}{\|x\|}$.

Exercice 5. Les applications suivantes sont elles des difféomorphismes ?

1. $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$.
2. $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{it}$.
3. $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.
4. Un isomorphisme linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie.
5. Un isomorphisme linéaire entre espaces de Banach.

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. Montrer que f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de I sur $f(I)$ si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

Exercice 7. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ par
$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$
Déterminer $f \circ f$ et montrer que f est un $\mathcal{C}^1-$difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ dans lui-même.

Exercice 8. On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application f par $f(x,y) = (x+y, xy)$.

1. Montrer que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser (faire des dessins).
2. Chercher l'expression de f^{-1} et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est égal à I.

Exercice 9.

1. Montrer que l'application Φ définie par

$$\Phi : (u, v) \mapsto \left(\frac{1}{2} \left(u^2 + v^2 \right), \frac{u}{v} \right)$$

définit un changement de variable entre deux ouverts que l'on précisera.
2. En utilisant le changement de variables précédent, résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante

$$2xy \frac{\partial f}{\partial x} + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$