Feuille 6 : Inversion locale

Exercice 1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que f définit une application surjective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.
3. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Calculer la matrice jacobienne de f en (x_0, y_0).
   (b) Montrer que f définit un difféomorphisme local au voisinage de (x_0, y_0).
4. L'application f réalise-t-elle un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$?

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la différentielle de f en 0 est un isomorphisme de $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il n'existe pas de voisinage de 0 sur lequel f est injective.
4. Quel est le but de cet exercice ?

Exercice 3. Les coordonnées polaires sont définies par l'application

$$\phi : \begin{cases} U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[& \mapsto & \mathbb{R}^2, \\ (r, \theta) & \longrightarrow & (r\cos\theta, r\sin\theta). \end{cases}$$

1. Calculer la jacobienne de ϕ en tout point de U.
2. Qui est $\phi(U)$?
3. Calculer la jacobienne de la réciproque de ϕ (où $\phi : U \mapsto \phi(U)$).
4. Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\phi(U)$. Exprimer le gradient de $f \circ \phi$ en fonctions des dérivées partielles de f.
5. Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$

Exercice 4. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ définie par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est bien définie et réalise en tout point un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^1$, mais n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 5. *(Théorème du rang constant)*

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, une application de classe $\mathcal{C}^1$, dont la différentielle est de rang constant sur tout un voisinage V de $b \in \mathbb{R}^n$, disons $r \in [\![0, n]\!]$. On veut montrer qu'il existe un changement de coordonnées locales $x \mapsto X$ au départ et un changement de coordonnées locales $y \mapsto Y$ à l'arrivée qui transforment f en l'application linéaire (de rang r) de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$A : (X_1, \ldots, X_n) \mapsto Y = (X_1, \ldots, X_r, 0, \ldots, 0).$$

1. Montrer que l'on peut, sans perte de généralité, se ramener au cas ou $b = 0$, $f(b) = 0$, $df_b = A$.
2. Montrer que les relations

$$(X_1, \dots, X_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n), x_{r+1}, \dots, x_n)$$

définissent bien un changement de coordonnées locales au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

3. Ecrire la relation $y = f(x)$ dans les coordonnées (x, y) sous forme d'une relation $y = \varphi(X)$ dans les coordonnées (X, y). Montrer que seuls les r premières coordonnées $(X_1, \dots, X_r)$ apparaissent dans φ.
4. Montrer que les relations

$$(y_1, \dots, y_n) = (Y_1, \dots, Y_r, \varphi_{r+1}(Y_1, \dots, Y_r) + Y_{r+1}, \dots, \varphi_n(Y_1, \dots, Y_r) + Y_n)$$

définissent bien un changement de coordonnées locales au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ qui répond à la question.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ localement injective.

1. L'application f est-elle automatiquement un difféomorphisme local ?
2. Dans cette question, on se donne $a \in \mathbb{R}^n$ et V un voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que le rang d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est une fonction semi-continue inférieurement, c'est à dire que si u_n tend vers u dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathrm{rg}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{rg}(u_n)$.
   (b) En déduire alors qu'il existe un ouvert inclus dans V sur lequel le rang de dg est constant.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer qu'il existe des points b arbitrairement proches de a tels que f soit un difféomorphisme local au voisinage de b.
   (a) Montrer que cela revient à montrer qu'il existe des points b arbitrairement proches de a tels que df_b soit inversible.
   (b) Montrer que si l'application linéaire df_x n'est pas inversible pour tout x dans un voisinage V de a, alors il existe un ouvert W inclus dans V sur lequel le rang de df est constant, inférieur ou égal à $n - 1$.
   (c) Conclure.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ le produit scalaire et $\| \cdot \|_E$ la norme associée. Soit $f : E \mapsto E$ de classe $\mathcal{C}^1$, $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in E,\ \forall h \in E, \qquad \langle df_x(h) | h \rangle \geq \alpha \|h\|_E^2.$$

1. Montrer pour $x, y \in E$: $\langle f(x) - f(y) | x - y \rangle_E \geq \alpha \|x - y\|_E^2$. En déduire que $f(E)$ est fermé.
2. Montrer que $f(E)$ est ouvert puis que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de E sur E.

Exercice 8. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même définie par

$$f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y).$$

Déterminer $f(\mathbb{R}^3)$ et montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 9. Soit E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ on définit alors

$$\exp(u) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}\ (u^k = u \circ \dots \circ u\ k \text{ fois}).$$

1. Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, $\exp(u)$ est un élément bien défini de $\mathcal{L}_c(E)$.
2. Montrer que pour tout n, l'application $u \mapsto u^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{L}_c(E)$ et calculer sa dérivée.

3. Montrer que l'application $u \mapsto \exp(u)$ est de classe C^1 sur $\mathcal{L}_c(E)$ et calculer sa dérivée.
4. Montrer que $u \mapsto \exp(u)$ réalise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme d'un voisinage ouvert de 0 sur un voisinage ouvert de id.

Exercice 10. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $|a| + |b| < r$, le problème

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5x^2y^3 = a \\ x - y + \sin(x^6y^3) = b \end{cases}$$

admet une solution $(x(a, b), y(a, b)) \in \mathbb{R}^2$. Peut-on assurer l'unicité de la solution ?

Exercice 11. On considère l'application

$$\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\sin\left(\frac{y}{2}\right) - x, \sin\left(\frac{x}{2}\right) - y\right) \end{array} \right).$$

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer la jacobienne de ϕ et montrer que $d\phi_{(x,y)}$ est inversible pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. En déduire que ϕ est un difféomorphisme local de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ sur son image et que cette image est ouverte.
4. Montrer que, pour tous $u_1 < u_2$, il existe $u \in]u_1, u_2[$ tels que

$$\sin\left(\frac{u_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{u_1}{2}\right) = \frac{1}{2}(u_2 - u_1)\cos\left(\frac{u}{2}\right).$$

   En déduire que ϕ est injective.
5. Montrer que $\phi(\mathbb{R}^2)$ est fermé.
6. Montrer que ϕ est un difféomorphisme global.
7. Soit $(u, v) = \phi(x, y)$. Calculer $(d\phi^{-1})_{(u,v)}$ en fonction de $d\phi_{(x,y)}$.
8. Montrer que ϕ^{-1} est Lipschitzienne.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (resp. $\mathbb{R}_n[X]$) l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n - 1$ (resp. n) et $D_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > \ldots > x_n\}$.

1. Montrer que l'application $\Psi : D_n \mapsto \mathbb{R}_{n-1}[X]$ définie par

$$\Psi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) - X^n,$$

   est un $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme de D_n sur son image.
2. En déduire que l'ensemble des polynômes scindés à racines simples de degré n est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 13. On considère le plan euclidien $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot, \cdot\rangle)$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $M, N \in \mathbb{R}^2$, on note $|MN|$ la distance entre M et N. On pose $A = (a, 0)$ et $B = (-a, 0)$ et on définit les fonctions

$$\phi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M = (x, y) & \longmapsto & |MA| \end{array} \right., \qquad \phi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M = (x, y) & \longmapsto & |MB| \end{array} \right.,$$

et

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M & \longmapsto & (\phi_1(M), \phi_2(M)) \end{array} \right..$$

1. Faire un dessin.

2. En quels points ϕ est-elle différentiable ? Montrer qu'en ces points elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que l'application ϕ est un $\mathcal{C}^\infty-$difféomorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ sur $\phi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$ et déterminer alors $\phi(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 14. Soit E un espace de Banach. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E. Soient U un voisinage ouvert de 0 dans E et $\Psi : U \mapsto \mathcal{L}(E)$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\Psi(0) = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de 0 contenu dans U dont l'image $\Psi(V)$ est contenue dans $GL(E)$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto (\Psi(x))(x)$ est un difféomorphisme au voisinage de 0.

Exercice 15. On considère l'application

$$\phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-y+x^2y-2y^5, x+3y-4x^2y^2), \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe des voisinages U et V de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tels que f induit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans V.
2. L'application f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image ?

Exercice 16. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère l'application $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x + a\cos(y), y + b\sin(x))$$

1. A quelle condition sur (a, b) la fonction f est-elle un difféomorphisme local en tout point de $\mathbb{R}^2$? On suppose par la suite que cette condition est vérifiée.
2. Montrer que pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ on a $|\sin(t_1) - \sin(t_2)| \leq |t_1 - t_2|$.
3. En déduire que f est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2$ sur son image.