# Feuille 7 : Fonctions implicites

**Exercice 1.** On considère l'équation
$$2xy - 2x + y - 2 = 0,$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $\Phi$ sur un domaine $D_\Phi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a,
$$(x, y) \text{ est solution} \iff x \in D_\Phi \text{ et } y = \Phi(x).$$
2. Montrer qu'il existe une fonction $\Psi$ sur un domaine $D_\Psi \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a,
$$(x, y) \text{ est solution} \iff y \in D_\Psi \text{ et } x = \Psi(y).$$
3. Quel lien peut-on faire entre les fonctions $\phi$ et $\psi$ ?

**Exercice 2.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2 - 1$.

1. Montrer que pour $x$ suffisamment proche de 0, il existe un unique $y(x) > 0$ tel que $f(x, y(x)) = 0$.
2. Faire un dessin de $x \mapsto y(x)$.
3. Montrer, sans résolution explicite, que la fonction $y$ ainsi définie au voisinage de 0 est dérivable et pour $x$ proche de 0, $y'(x) = -\frac{3x}{5y(x)}$.
4. En déduire un développement à l'ordre 2 de $y$ au voisinage de 0.

**Exercice 3.** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\phi : U \mapsto \mathbb{R}^2$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ : $\phi = (f, g)$. On considère $(u, v)$ réels et on cherche $x, y$ tels que
$$\phi(x, y) = (u, v).$$

1. A-t-on des solutions si la différentielle de $\phi$ est de rang 0 ?
2. On suppose que la différentielle de $\phi$ est de rang 2 en tout point de $U$. Montrer que pour tout $(u, v)$ le système admet une solution, unique localement. Que peut-on dire si la différentielle est de rang 2 en un point de $U$ seulement ?
3. On suppose maintenant que la différentielle de $\phi$ est de rang 1 en tout point de $U$.
   (a) Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne s'annule pas sur $U$, montrer que $\psi : (x, y) \mapsto (f(x, y), y)$ définit un difféomorphisme d'un ouvert $V \subset U$ sur $\psi(V)$.
   (b) En déduire $G$ telle que $g(x, y) = G(f(x, y))$ sur $V$.
   (c) Que peut-on dire des solutions du système ?

**Exercice 4.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à l'équation
$$M^3 + N^3 - 3MN = I_n,$$
d'inconnue $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

1. Montrer que l'équation définit localement $M = \Phi(N)$ au voisinage de $(M, N) = (0, I_n)$.
2. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de $\Phi$ au voisinage de l'identité.

**Exercice 5.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice possédant $n$ valeurs propres réelles distinctes. En élaborant une preuve basée sur le théorème des fonctions implicites, montrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est proche de $A$, alors $M$ possède également $n$ valeurs propres réelles distinctes, et ces valeurs propres dépendent continument de $M$.

**Exercice 6.** On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

1. Soit $A_0$ une matrice symétrique inversible. On considère l'application $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$\Phi(M) = M^\top A_0 M.$$
Montrer qu'elle est différentiable et calculer sa différentielle en l'identité.
2. Montrer que $d\Psi_{I_n}$ est surjective *(on pensera à réduire $A_0$)* et calculer son noyau.
3. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $V$ de $A_0$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\Psi : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto GL_n(\mathbb{R})$ tels que
$$\forall A \in V, \qquad A = \Psi(A)^\top A_0 \Psi(A)$$
4. En déduire que l'ensemble des formes quadratiques de signature $(p, q)$ avec $p + q = n$ est un ouvert de l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 7.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère l'équation
$$(x - a)(x - b) - \varepsilon x^3 = 0.$$

1. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit l'équation admet trois solutions distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$.
2. Donner un développement asymptotique de $x_1(\varepsilon), x_2(\varepsilon)$ et $x_3(\varepsilon)$ jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

**Exercice 8.** On considère le système de trois équations à quatre inconnues
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2, \\ x + y + z + t = 0, \end{cases}$$
dont on cherche les solutions dans $\mathbb{R}^4$.

1. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $(0, -1, 1, 0)$ et une fonction $\Phi : t \mapsto (x(t), y(t), y(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 tels que $(x, y, z, t) \in \mathcal{V}$ est solution du système si et seulement si $(x, y, z) = \Phi(t)$.
2. Calculer la dérivée de $\Phi$ en 0.

**Exercice 9.** Soient $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, et l'équation $(E) : \cos(tx) + \sin(tx) = x$.

1. Montrer qu'il existe un ouvert $U$ de $\mathbb{R}$, voisinage de 0, tel que lorsque $t \in U$, l'équation $(E)$ admet une unique racine $x(t)$.
2. Montrer que l'application $t \longmapsto x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U$.
3. Donner un développement limité à l'ordre 3 de $t \longmapsto x(t)$ au voisinage de 0.
4. Quel est l'ouvert maximal sur lequel définir cette application $t \longmapsto x(t)$ ? *On pourra s'aider d'un dessin.*

**Exercice 10.** Soit $f$ une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, telle que $f(0) = 0$. On suppose que 1 n'est pas valeur propre de l'application linéaire $df_0$.

1. Montrer que 0 est un point fixe isolé.
2. *Application.* Soit $f(x, y) = (x(\sin(xy) - 1) + y, y(\cos(xy) - 1) + x)$. Montrer que $f$ ne s'annule pas dans un voisinage épointé de l'origine, c'est à dire que dans un voisinage de l'origine, si $g(x, y) = (0, 0)$, alors $(x, y) = (0, 0)$.
3. Soit $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit
$$f_\lambda(x) = f(x) + \lambda g(x)$$
Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$, un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\omega : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \mapsto \mathcal{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$, tels que, pour tout $\lambda \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\omega(\lambda)$ est l'unique point fixe de $f_\lambda$ dans $\mathcal{V}$.

4. *Application.* Soit l'application $G : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par

$$G_\lambda(x,y,z) = \left(2xe^x + y + \lambda e^{-(x^2+y^2)}, \sin(z) + \lambda\cos(x+y-z), 2y\cos(x) + \lambda\right)$$

   Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $|\lambda| < \varepsilon$, l'application $G_\lambda$ admet un point fixe unique dans $\mathcal{V}$.

**Exercice 11.** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation $x - zt = f(z)$ définit localement $z$ fonction implicite de $t$ et $x$.
2. Montrer que l'on a alors : $\frac{\partial z}{\partial t} - z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

**Exercice 12.** Soit $f : (\mathbb{R}^3, (a,b,c)) \to (\mathbb{R}, 0)$ une fonction de classe $C^1$ telle que

$$\partial_x f(a,b,c) \neq 0,\ \partial_y f(a,b,c) \neq 0,\ \partial_z f(a,b,c) \neq 0.$$

On note $X, Y, Z$ les fonctions, définies implicitement et localement, telles que

$$f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = X(y,z) \Leftrightarrow y = Y(x,z) \Leftrightarrow z = Z(x,y).$$

Que vaut le produit $\partial_y X\, \partial_z Y\, \partial_x Z$ au point $(a,b,c)$ ? *C'est la formule de Clapeyron.*

**Exercice 13.**

1. Donner une valeur approchée de la solution, proche de 1, de l'équation

$$x^7 + 0,99\,x - 2,03 = 0.$$

2. Montrer que la solution exacte vérifie $1 \leq x \leq 2$.

**Exercice 14.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,p,q) \mapsto x^3 + px + q$. Dessiner, pour $p$ fixé respectivement $< 0$, $= 0$ et $> 0$, les courbes d'équation $f(x,p,q) = 0$ dans le plan des $(x,q)$. Puis tracer dans le plan des $(p,q)$ le lieu des points où l'équation $f = 0$ ne détermine pas de fonction implicite $x(p,q)$.