# Feuille 8 : Ordre supérieur

**Exercice 1.** Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

1. Étudier la continuité de $f$ et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction $f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ?

**Exercice 2.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Donner une condition suffisante sur les dérivées partielles de $f$ pour que l'application

$$\begin{cases} \dfrac{f(x,y) - xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, \quad \text{sinon}, \end{cases}$$

soit continue.

**Exercice 3.**
1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x^4 + y^2 + z^3, e^x \sin(yz))$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $d^2 f_{(0,\pi,1)}((1,2,1),(0,1,0))$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (\cos x \cosh(y), -\sin(x)\sinh(y))$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer $d^2 f_{(0,0)}((1,0),(0,1))$.

**Exercice 4.** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $\pi$-périodique de classe $\mathcal{C}^2$. On définit $g(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 f(\theta)$.

1. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de $f$.
2. En déduire les valeurs de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$.
3. Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de $x$ et $y$) pour lequel ces deux dérivées sont distinctes.

**Exercice 5.** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On définit, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) := f(\|x\|^2),$$

avec $\|\cdot\|$ la norme euclidienne. Calculer la Hessienne de $g$.

**Exercice 6.** Ecrire le développement de Taylor d'ordre 2 en $(0,0)$ des fonctions définies par

$$\begin{aligned} e(x,y) &= \left( \frac{1}{(1+\sin(x+y))^2}, \frac{\exp(x-y)-1}{1+\ln(1+xy)} \right) \\ f(x,y) &= \ln(1+2x+3y), \\ g(x,y) &= x^2\exp(y) - y\exp(x), \\ h(x,y) &= \cos\left(\tan(x+\sin y)\right). \end{aligned}$$

**Exercice 7.** Donner le développement de Taylor à l'ordre 2 de $A \mapsto \left(\mathrm{Tr}\left(AA^\top\right)\right)^2$ au voisinage de l'identité.

**Exercice 8.** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial f}{\partial y^2} = 0. \qquad (\star)$$

où $f$ est de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ distincts, fixés. On fait le changement de variable :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

de sorte que $f(x, y) = g(u, v)$.

1. Écrire l'équation déduite de $(\star)$ par ce changement de variable.
2. En déduire que $f$ est solution de $(\star)$ si et seulement si $g$ est solution de l'une des équations suivantes

$$(1) : \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0, \qquad (2) : \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0, \qquad (3) : \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$

**Exercice 9.** Trouver les applications $f$ appartenant à $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial f}{\partial y^2} = 0.$$

*Indication : on pourra utiliser au choix le changement de variables : $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$ ou les coordonnées polaires ... ou les deux !*

**Exercice 10.** On note $\mathcal{D}$ le disque unité du plan. Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, telle que son laplacien $\Delta f$ soit nul.

1. On définit, pour $r \in [0, 1]$, la fonction $g(r) = \int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, d\theta$.
   (a) Montrer que $g$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
   (b) Montrer que $g$ ne dépend pas de $r \in [0, 1]$.
2. Calculer alors $\iint_{D_r} f(x, y)\, dxdy$, $D_r$ étant le disque fermé de centre 0 et de rayon $r$.

**Exercice 11.** Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-evn de dimension finie et $f \in \mathcal{C}^1(E, F)$ telle que $x \mapsto df_x$ est bornée sur $E$ et qu'il existe $k > 0$ tel que $df$ est $k$-Lipschitzienne (de $E$ dans $\mathcal{L}_c(E, F)$). Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq a\|x - y\| + b\|x - y\|^2.$$

**Exercice 12.** Soit $a < b$ deux réels et $f \in \mathcal{C}^2(]a, b[, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe $\alpha$ et $\beta$ positifs tels que

$$\|f(t)\| \leq \alpha \text{ et } \|f''(t)\| \leq \beta,$$

pour tout $t \in ]a, b[$. Soit $t \in ]a, b[$ et $r > 0$ tels que $]t - r, t + r[ \subset ]a, b[$. Montrer que

$$\|f'(t)\| \leq \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta r}{2}$$

puis que $\|f'(t)\| \leq \min\left(\frac{\alpha}{b-a} + \frac{\beta(b-a)}{2}, \sqrt{2\alpha\beta}\right)$.