Feuille 9 : Sous-variétés

Exercice 1. *Questions proches du cours*

1. Montrer que l'hypothèse d'homéomorphisme est nécessaire dans la définition paramétrique d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
2. Prouver l'équivalence entre les définitions de "sous-variété" données en cours (ensemble lisse, vision implicite, vision paramétrique).
3. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On se donne $a \in M$ et v_1, v_2 deux vecteurs tangents à M en a, et deux chemins γ_1 et γ_2 associés, donnés par la définition de vecteur tangent. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, donner un chemin γ de M ayant pour vecteur tangent $\alpha v_1 + v_2$.
4. Les différentielles des fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives ?
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x, y, 0)$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (y, z)$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto xy + 2yz + 3xz$
5. Soient E, F deux $\mathbb{R}-$espaces vectoriels de dimension finie, U un ouvert de E et $f : U \mapsto F$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $\{(x, f(x)) \in U \times F, x \in U\}$ est une sous-variété de $E \times F$.

Exercice 2. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont-ils des sous-variétés ? *Attention, on demande une preuve rigoureuse !*

1. $\mathcal{V} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x^2\right\}$,
2. $\mathcal{V} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^3 = x^2\right\}$,
3. $\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = z^2\right\}$,
4. $\mathcal{V} = \left\{\left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right), t > -1\right\}$,
5. $\mathcal{V} = \{(\cos(t), \cos(t)), t \in \mathbb{R}\}$.
6. $\mathcal{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = x - 2(x^2 + y^2)\}$.
7. $\mathcal{V} = \{(t, t^2);\ t \in \mathbb{R}\}$.
8. $\mathcal{V} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$.

Même question en regardant les ensembles $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Conseil amical ♡ : on se forcera à dessiner autant que possible ces (non-)sous-variétés.

Exercice 3. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-variétés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont on calculera la dimension et dont on donnera l'espace tangent.

— le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$.
— les matrices symétriques $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
— les matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Montrer que
$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = 1\right\},$$
est une sous variété de $\mathbb{R}^4$, homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Exercice 5. Ici, R est un nombre réel positif.

1. Pour quelles valeurs de R, l'ensemble

$$\mathcal{V} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x^2 + y^2 - 2x = 0\right\}$$

   est-il une sous-variété non vide ? Donner alors sa dimension et son espace tangent en chacun de ses points. Donner la position de $\mathcal{V}$ par rapport à son espace tangent.
2. Pour quelles valeurs de R l'ensemble $\mathcal{V}$ est-il connexe ?
3. Dessiner, dans plan $\mathbb{R}^2$, l'allure de la sous-variété $\mathcal{V}$ (pour les valeurs pertinentes de R).
4. On se place dans le cas où $\mathcal{V}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Donner R.
   (b) Effectuer l'étude locale de $\mathcal{V}$ au voisinage du point $(2, 0, 0)$. Montrer que c'est un point double de $\mathcal{V}$, et donner un changement de coordonnées (*i.e.* un difféomorphisme) explicite qui transforme localement $\mathcal{V}$ en l'union de deux droites $\left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u^2 = v^2\right\}$. Préciser ensuite l'équation des deux tangentes à $\mathcal{V}$ en $(2, 0, 0)$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{V}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 + t = 0 \\ x - y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Montrer qu'il existe un voisinage U du point $(x, y, z, t) = (1, -1, 0, 0)$ tel que $U \cap \mathcal{V}$ soit une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7. On considère l'ensemble $\mathcal{N} = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \neq 0, M^2 = 0\right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \neq 0, (\det(M), \mathrm{tr}(M)) = (0, 0)\}$.
2. En déduire que $\mathcal{N}$ est une sous-variété différentiable dont on donnera la dimension.
3. Quel est l'espace tangent en un point de $\mathcal{N}$?

Exercice 8. Montrer que l'ensemble D_u des polynômes unitaires de degré 2 ayant une racine double est une sous-variété de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on déterminera la dimension et l'espace tangent en tout point.

Exercice 9. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3,$$

puis l'ensemble S d'équation $f(x, y, z) = 0$.

1. Est-ce une surface lisse de $\mathbb{R}^3$? Et $S \setminus \{0\}$?
2. Déterminer l'équation du plan tangent à S au point $(1, 1, 1)$.
3. Quelle est la position de S par rapport à son plan tangent au point $(1, 1, 1)$?
4. (a) Montrer qu'au voisinage du point $(1, 1, 1)$, la surface S est décrite par une équation de la forme $z = \Phi(x, y)$ où Φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie au voisinage de $(1, 1)$.
   (b) Ecrire le développement limité de Φ à l'ordre 2 au point $(1, 1)$.
   (c) Donner la matrice Hessienne de Φ au point $(1, 1)$.

Exercice 10. On suppose $R > r > 0$.

1. Représenter la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par l'équation

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2.$$

2. Montrer que c'est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, on considère la quadrique d'équation $\|x\|^2_{2,\mathbb{R}^n} - \|y\|^2_{2,\mathbb{R}^p} = 1$.

1. Montrer que c'est une variété difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.
2. Représenter les différents cas quand $n + p = 3$.

Exercice 12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^4$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(\alpha t), \sin(\alpha t)).$$

1. Montrer que φ est une immersion (*i.e.* sa différentielle est injective) injective.
2. Montrer que $\varphi(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{T}^2$.
3. En déduire que l'image de φ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 13. Soit M_1 une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p_1 et M_2 une sous-variété de $\mathbb{R}^m$ de dimension p_2. Montrer que

$$M_1 \times M_2 = \{a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n+m};\ a_1 \in M_1,\ a_2 \in M_2\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$ dont on précisera la dimension.

Exercice 14. Soient M et N deux sous-variétés lisses de $\mathbb{R}^n$, de dimensions respectives m et n.

1. On suppose que pour tout $x \in M \cap N$, $T_xM + T_xN = \mathbb{R}^d$.
   (a) Montrer que $M \cap N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^d$ et préciser sa dimension.
   (b) Donner son espace tangent en $x \in M \cap N$.
   (c) On dit alors que M et N sont transverses. Justifier cela avec un dessin.
2. La réciproque est-elle vraie ?
3. Est-il vrai plus généralement que si $\dim(T_xM + T_xN)$ ne dépend pas de $x \in M \cap N$, alors nécessairement $M \cap N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^d$?

Exercice 15. Soient Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^3$ et S l'ellipsoïde d'équation $Q = 1$. Soit a un point tel que $Q(a) > 1$.

1. Justifier que a est à l'extérieur de S.
2. Le contour apparent de S vu de a est l'ensemble C des points x de S où l'espace affine tangent $x + T_xS$ contient a.
   (a) Faire un dessin.
   (b) Montrer que C est une ellipse (intersection de S et d'un plan affine de $\mathbb{R}^3$).

Exercice 16. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $d < n$. Le but de l'exercice est de montrer que M est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que l'image d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.
2. En déduire que M est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^n$.