Elements de correction de

l'examen final 2019

Exercice 1 :

1. Oui. Prendre $\Phi(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\|x\|\right)\frac{x}{\|x\|}$ de $B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^n$.

2. Non. Prendre $Q_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{X^p}{p!}$, elle est de Cauchy car $\|Q_n - Q_m\|_1 = \sum_{m+1}^{n} \frac{1}{p!}$ pour $n \geq m+1$, qui peut être rendu uniformément petit. Mais Q_n n'est pas convergente, puisque si elle est convergente on aurait un entier N_0 tel que

$$\left\| \sum_0^{N_0} \frac{X^p}{p!} - \sum_0^{N} a_i X^i \right\| \leq \frac{1}{2} \sum_0^{N} \left|a_i - \frac{1}{i!}\right|$$

ce qui n'est pas possible.

3. On procède avec le théorème du point fixe, sur l'espace X des fonctions continues 2π-périodiques qui est complet pour $\| \|_\infty$. L'opérateur $T : X \to X$ qui à f associe $T(f)(\cdot) = \frac{1}{2}\sin(\cdot + f(\cdot))$ est contractant car

$$\forall x,\ \|T(f)(x) - T(g)(x)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|\sin(x + f(x)) - \sin(x + g(x))\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f(x) - g(x)\|$$
$$\leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$$

(et $T(f)$ est bien 2π-périodique et continue, ie T va de $X \to X$).

4 On utilise le théorème des fonctions implicites. Soit $f(x,y) = e^x + e^y + x - y - 2$ sur $\mathbb{R}^2$. Son gradient $\nabla f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ a 1 coordonnée non nulle, on peut alors écrire que $f(x,y) = 0$ près de $(0,0)$ est équivalent à $x = \varphi(y)$, avec $\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}(0,0) = 0$. Ecrivons alors $\varphi(y) = 0 + 0y + \alpha y^2 + o(y^2)$,

$$\begin{aligned} 0 = f(\varphi(y), y) &= \exp(\alpha y^2 + o(y^2)) + e^y + \alpha y^2 + o(y^2) - y - 2 \\ &= 1 + \alpha y^2 + o(y^2) + \frac{y^2}{2} + o(y^2) + \alpha y^2 + o(y^2) + 1 - 2 \\ &= \left(2\alpha + \frac{1}{2}\right) y^2 + o(y^2) \end{aligned}$$

et donc $\alpha = -\frac{1}{4}$.

5. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(M) = \sin(\mathrm{Tr}(M^2))$. Cette fonction est continûment différentiable 2 fois sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par composition de fonctions $\mathcal{C}^2$. Pour M, H, K dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$df_M(H) = \cos(\mathrm{Tr}(M^2))\, d(\mathrm{Tr}(M^2) \leftarrow M)_M(H) = 2\cos(\mathrm{Tr}(M^2))\,\mathrm{Tr}(MH)$$

$$\begin{aligned} \text{et } d^2 f_M(H,K) &= d(df_M(H))_M(K) = 2\, d(M \to \cos(\mathrm{Tr}(M^2)))_M(K)\,\mathrm{Tr}(MH) \\ &\quad + 2\cos(\mathrm{Tr}(M^2))\,\mathrm{Tr}(HK) \\ &= -2\sin(\mathrm{Tr}(M^2))\,\mathrm{Tr}(MH)\,\mathrm{Tr}(MK) + 2\cos(\mathrm{Tr}(M^2))\,\mathrm{Tr}(HK) \end{aligned}$$

6. On utilise les extremas liés. La fonction $f(x,y)=x^3+y^3$ est soumise à la contrainte $g(x,y)=x^2+y^2-1=0$. Cherchons les multiplicateurs de Lagrange associés à cette contrainte; (f et g sont bien C^2 sur $\mathbb{R}^2$).

$$\nabla(f-\lambda g) = \begin{pmatrix} 3x^2-2\lambda x \\ 3y^2-2\lambda y \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad x^2+y^2-1=0.$$

Ce gradient est nul si $x(3x-2\lambda)=0$ et $y(3y-2\lambda)=0$

$$\Leftrightarrow \left(x=0 \text{ ou } x=\frac{2\lambda}{3}\right) \text{ et } \left(y=0 \text{ ou } y=\frac{2\lambda}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x=0 \text{ et } y=0) \text{ ou } \left(x=0 \text{ et } y=\frac{2\lambda}{3}\right) \text{ ou } \left(x=\frac{2\lambda}{3} \text{ et } y=0\right)$$

$$\text{ou } \left(x=y=\frac{2\lambda}{3}\right)$$

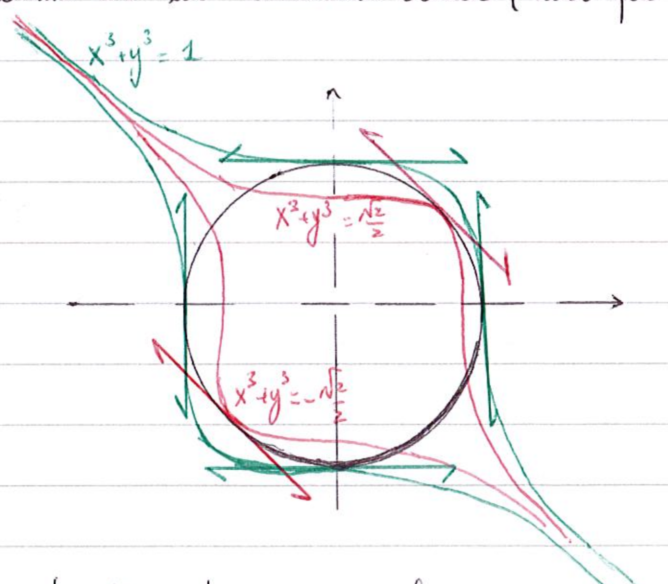
avec $x^2+y^2-1=0$. Ainsi, les points critiques sont

$$(0,\pm 1),\ (\pm 1,0),\ \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad (6 \text{ points})$$

On observe que $f((-1,0))=f(0,-1)=-1$ et $f((1,0))=f((0,1))=1$ donc $(-1,0)$ et $(0,-1)$ sont des minima globaux et $(1,0)$ et $(0,1)$ des maxima globaux (noter que ces extremas sont atteints, par compacité du cercle). Reste à discuter $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. On calcule la Hessienne en ces points (noter qu'il suffit de faire un seul point, et conclure par symétrie)

$$\mathrm{Hess}(f-\lambda g) = \begin{pmatrix} 6x-2\lambda & 0 \\ 0 & 6y-2\lambda \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} & \text{en } \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ avec } \lambda=\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} & \text{en } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ avec } \lambda=-\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

qui sont respectivement définies positives et négatives, donc les points sont respectivement un maximum et un minimum local (noter que la définie positivité suffit sur $T_{(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})}S^1$).



(Désolé, je n'avais qu'un pinceau sous la main pour le cercle ...)

Les lignes de niveau sont tangentes au cercle aux 6 points critiques!

7\. a. La jacobienne de Φ est $\mathrm{Jac}(\Phi) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$ sur Ω. Elle est bien inversible puisque $\det(\mathrm{Jac}(\Phi)) = -\frac{2x}{y} \neq 0$ sur Ω. De plus, Φ est bijective, en effet $f(x,y) = (u,v)$, avec $(u,v) \in \Omega$ implique $(x,y) = \left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right) \in \Omega$. Le théorème d'inversion globale conclut.

b. On a pour $(x,y) \in \Omega$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(g\left(xy, \frac{x}{y}\right)\right) = \dfrac{\partial g}{\partial u}\left(xy, \frac{x}{y}\right) y + \dfrac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) \dfrac{1}{y} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}\left(xy, \frac{x}{y}\right) x - \dfrac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$$

par la "chain rule".

D'où

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right) y + \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right)\dfrac{1}{y}\right) + \dfrac{1}{y}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) y + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right)\dfrac{1}{y}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + x\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right) y + \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right)\dfrac{1}{y}\right) \\ \qquad - \dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) - \dfrac{x}{y^2}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-)\, y + \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(-)\dfrac{1}{y}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right) x - \dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right)\dfrac{x}{y^2}\right) - \dfrac{x}{y^2}\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-)\, x - \dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}(-)\dfrac{x}{y^2}\right) + \dfrac{2x}{y^3}\dfrac{\partial g}{\partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) \end{cases}$$

La dérivée $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ étant la même que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ par le théorème de Schwarz.

c. On effectue le changement de variables donné par Φ, si f est solution, posons $g = f \circ \Phi$:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2\left(y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\left(xy, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\left(xy, \frac{x}{y}\right)\right)$$

$$- y^2\left(x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(-) - \frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\cdot\frac{x^2}{y^4} + \frac{2x}{y^3}\frac{\partial g}{\partial v}\right)$$

$$= 4x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - 2\frac{x}{y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

donc $0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right) - \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}$ en (u,v). On en déduit $\frac{\partial g}{\partial v} = C(v)\exp\left(\frac{1}{2}\ln u\right)$, soit encore $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = C(v)\sqrt{u}$, où C est une fonction $\mathcal{C}^2$.

Conclusion, $g(u,v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v)\sqrt{u}$, où les fonctions φ_1 et φ_2 sont $\mathcal{C}^2$. En variables (x,y), $f(x,y) = \varphi_1(xy) + \varphi_2\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy}$, et la réciproque se vérifie.

Exercice 2 : Traçons la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = (1+\cos(t))\sin(t) \\ y(t) = 1+\cos(2t) \end{cases}$

- La courbe est 2π-périodique et $t \to -t$ est un invariant avec symétrie % l'axe des ordonnées, on étudie donc sur $[0,\pi]$.
- On a $x'(t) = -\sin^2(t) + (1+\cos(t))\cos(t) = \cos^2(t) - 1 + \cos(t) + \cos^2(t)$

$= 2\cos^2(t) + \cos(t) - 1.$

$y'(t) = -2\sin(2t).$

Autrement dit, $x'(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = -1$ ou $\cos(t) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow t = \pi$ ou $t = \frac{\pi}{3}$ (dans $[0,\pi]$)

$y'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$ ou $t=\pi$ (———)

- Tableau des variations jointes :

t	0		$\pi/3$		$\frac{\pi}{2}$		π
x'		$+$	0	$-$			0
x		$\nearrow$		$\searrow$			
y		$\searrow$				$\nearrow$	
y'	0	$-$			0	$+$	0

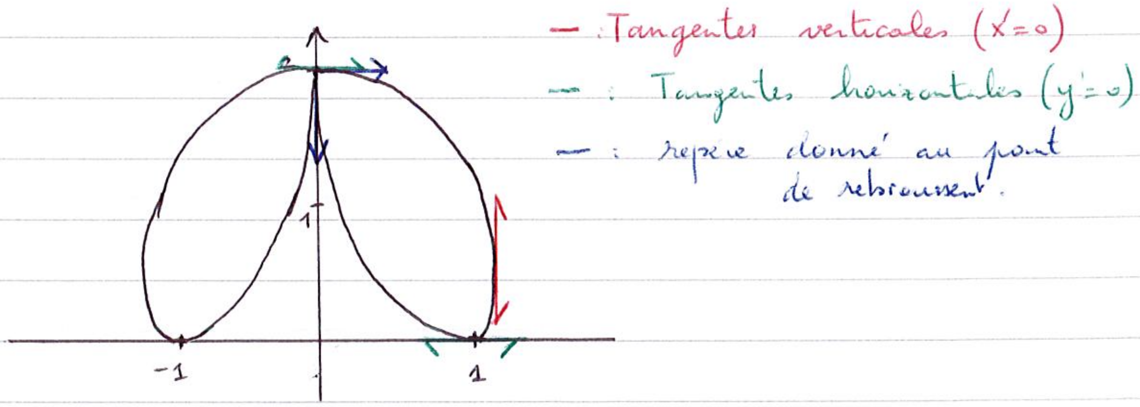
- Il y a un point singulier en $t = \pi$: le DL donne, avec $t = \pi + u$

$x(u) = x(u+\pi) = -(1-\cos(u))\sin u = \frac{1}{2}u^3 + o(u^3)$

$y(u) = 1 + \cos(2(\pi+u)) = 1 + \cos(2u) = 2 - 2u^2 + o(u^3)$

soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} u^3 + o(u^3)$ et donc c'est un rebroussement de première espèce.

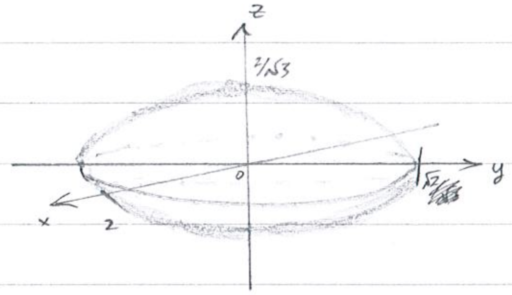
- Tracé de la courbe :



C'est un "fortune cookie" ! Happy New Year 2020 !

Exercice 3

1. C'est un ellipsoïde ! On a $S = f^{-1}(\{0\})$ avec $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2-4$ et $\nabla f = \begin{pmatrix}2x\\4y\\6z\end{pmatrix}$ n'est jamais nul sur S donc S est une sous-variété de dimension 2:



2.a. On cherche les points critiques de h sur S:

$$0 = \nabla(h - \lambda f) = \begin{pmatrix}2x-2-2\lambda x\\ 2y-4\lambda y\\ -6z\lambda\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad f(x,y,z) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(1-\lambda)x = 1\\ 2y(1-2\lambda) = 0\\ z\lambda = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-\lambda)x = 1\\ y=0 \text{ ou } \lambda = \frac{1}{2}\\ z=0 \text{ ou } \lambda = 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $[(1-\lambda)x = 1]$ et $[(y=0$ et $z=0)$ ou $(y=0$ et $\lambda=0)$ ou $(\lambda=\frac{1}{2}$ et $z=0)$ ou $\cancel{(\lambda=\frac{1}{2} \text{ et } \lambda=0)}]$

$\Leftrightarrow$ $((1-\lambda)x = 1, y=0, z=0)$ ou $((1-\lambda)x=1, y=0, \lambda=0)$ ou $((1-\lambda)x=1, \lambda=\frac{1}{2}, z=0)$

sur S

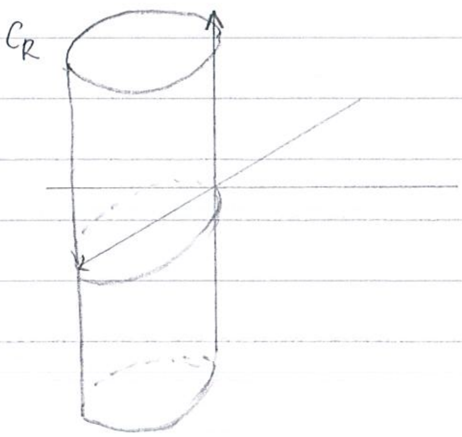
$\Leftrightarrow$ $\left((x,y,z) = (2,0,0), \lambda = \cancel{0}\,\frac{1}{2};\ = (-2,0,0), \lambda = \frac{3}{2}\right)$ ou $(x,y,z) = (1,0,1)$ ou $(\cancel{x,y,z}) = (2,0,0)$

Les ~~[illegible]~~ points critiques sont $(2,0,0)$ et $(-2,0,0)$. et $(1,0,1)$

b. Les valeurs de h sont alors $h(2,0,0) = 0$, $h(-2,0,0) = 8$, $h(1,0,1) = -1$

Le minimum de h est -1, le max est 8.

3. C'est un cylindre ! C'est $(h-R)^{-1}\{0\}$, avec $\nabla(h-R) = \begin{pmatrix}2x-2\\2y\\0\end{pmatrix}$ qui n'est nul qu'en $(1,0,z)$, qui n'est pas dans C_R puisque $1^2+0^2-2\cdot 1 = -1 \neq R$. C_R est donc une sous variété de dim 2.



4\. a) Les points de $S \cap C_R$ vérifient $h = R$ et $f = 0$, soit $\Lambda(x,y,z) = 0$ avec

$$\Lambda(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+2y^2+3z^2-4 \\ x^2+y^2-2x-R \end{pmatrix} \quad \text{de } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2.$$

On regarde si $d\Lambda$ est une submersion : $\mathrm{Jac}(\Lambda) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 6z \\ 2x-2 & 2y & 0 \end{pmatrix}$

Etudions les mineurs de taille 2 :

$$\begin{vmatrix} 2x & 4y \\ 2x-2 & 2y \end{vmatrix} = 4xy - 4y(2x-2) = 4y(-x+2) \quad , \quad \begin{vmatrix} 2x & 6z \\ 2x-2 & 0 \end{vmatrix} = -6z(2x-2)$$

et $\begin{vmatrix} 4y & 6z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -12yz$. Les valeurs d'annulation des trois mineurs en même temps sont $\begin{cases} y=0 \text{ ou } x=2 \\ z=0 \text{ ou } x=1 \\ y=0 \text{ ou } z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $(y=0$ ou $x=2)$ et $(z=0$ ou $x=1)$ et $(y=0$ ou $z=0)$

$\Leftrightarrow$ $((y=0$ et $z=0)$ ou $(y=0$ et $x=1)$ ou $(x=2$ et $z=0)$ ou $(x=2$ et $x=1))$ et $(y=0$ ou $z=0)$

$\Leftrightarrow$ $(y=0, z=0)$ ou $[\{y=0\}$ et $x=1$ et $(y=0$ ou $z=0)]$ ou $[\{x=2$ et $z=0$ et $(y=0$ ou $z=0)]$ ou $[$~~$x=2, x=1$ et $(y=0$ ou $z=0)$~~$]$

$\Leftrightarrow$ $(y=0, z=0)$ ou $(y=0, x=1)$ ou $(x,y,z)=(1,0,0)$ ou $(x,y,z)=(2,0,0)$ ou $(2, ?, 0)$

Reste à voir si un point $(x,0,0)$ ou $(1,0,z)$ ou $(1,0,0)$ ou $(2,0,0)$ ou $(2,y,0)$ est dans $S \cap C_R$:

$(x,0,0) \in S \cap C_R \Leftrightarrow x^2 = 4$ et $R = x^2 - 2x \Leftrightarrow x=-2, R=8$ (exclu) ou $x=2, R=0$.

$(1,0,z) \in S \cap C_R \Leftrightarrow z^2 = 1$ et $R = -1$ exclu.

$(2,0,0) \in S \cap C_R \Leftrightarrow R = 0$.

$(2,y,0) \in S \cap C_R \Leftrightarrow y = 0$ et $y^2 = R$ exclu.

Ainsi, si $R \neq 0 = R_0$, $S \cap C_R$ est une sous-variété de dimension 1 et son espace tangent est alors $\mathrm{Ker}(d\Lambda)$ c'est à dire $\{(h_1,h_2,h_3) / \mathrm{Jac}(\Lambda)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = 0\}$

$(h_1,h_2,h_3) \in \mathrm{Ker}(d\Lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} x h_1 + 2y h_2 + 3z h_3 = 0 \\ (x-1)h_1 + y h_2 = 0 \end{cases}$

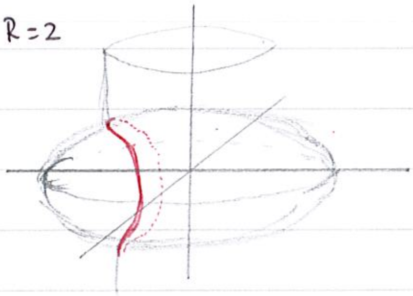
$\Leftrightarrow (h_1,h_2,h_3) \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}\right)^{\perp} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3yz \\ -3z(x-1) \\ y(x-2) \end{pmatrix}\right\}$

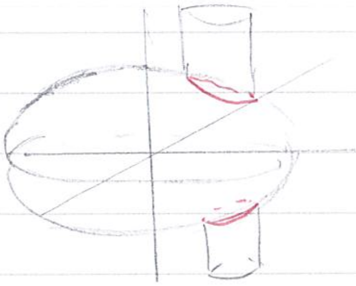
Donc $T_{(x,y,z)}(S \cap C_R) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 3yz \\ -3z(x-1) \\ y(x-2) \end{pmatrix}\right\}$.

ooo (J'ai utilisé le produit vectoriel, M'sieur)

c) Pour $R \in]-1,8[\setminus \{0\}$:

R=2





$R=\frac{1}{2}$

d) Au vu de la question 2b.), $S \cap C_R$ est vide si $R \notin]-1,8[$, sauf peut-être si $R=-1$ et $R=8$ où elle est réduite à deux points si $R=-1$ et un point si $R=8$. Dans ces derniers cas, c'est une sous variété de dimension 0.

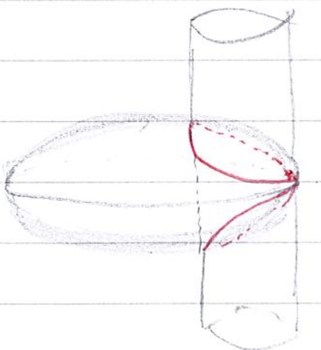
5a. Lorsque $R = R_0 = 0$, la jacobienne de Λ est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 1, on ne peut donc rien dire avec.

$S \cap C_0$ est donné par les équations $\begin{cases} x^2+2y^2+3z^2=4 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{cases}$

Posons $x = 2-x'$, il vient $\begin{cases} -4x'+x'^2+2y^2+3z^2=0 \\ y^2 = 2x'-x'^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'^2 = 3z^2 \\ y^2 = x'(2-x') \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = t(1-t) \\ v^2 = t^2 \end{cases}$ après changement de coordonnées. (pour t assez petit)

Cet ensemble admet un point double, un argument de connexité conclut que ce n'est pas une sous-variété.



Exercice 4

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Montrons que $f^{-1}(K)$ est compact en montrant qu'il est fermé et borné. Comme K est fermé, $f^{-1}(K)$ est fermé. Reste à montrer que $f^{-1}(K)$ est borné. S'il existait $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $f^{-1}(K)$ telle que $\|x_n\| \to +\infty$, alors $\|f(x_n)\| \to +\infty$ par hypothèse sur f et $f(x_n) \in K$, donc K ne serait pas borné. Absurde. Donc $f^{-1}(K)$ est borné.

2.a. Comme df_x est inversible pour $x \in \mathbb{R}^n$, l'image de f est ouverte par le théorème d'inversion locale ($f \in C^1$).

b. Soit $(y_p) \in f(\mathbb{R}^n)$ qui converge dans $\mathbb{R}^n$. Montrons que sa limite est bien dans $f(\mathbb{R}^n)$. Ecrivons $y_p = f(x_p)$, avec $x_p \in \mathbb{R}^n$ pour tout p. Comme la suite $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée car convergente, on peut trouver K compact tel que $y_p \in K$ pour tout p. Par 1.), x_p est alors une suite bornée, qui a alors une sous-suite convergente $x_{\varphi(p)} \to x_\infty$. De cela on déduit $y_\infty = f(x_\infty)$.

c. L'image est ouverte et fermée dans $\mathbb{R}^n$ qui est connexe, donc f est bien surjective.

3a. C'est le théorème d'inversion locale puisque f est $\mathcal{C}^1$ et df_x est inversible.

b. L'ensemble $f^{-1}(y)$ est un compact puisque $\{y\}$ est un compact et par la Q1. Par ailleurs $f^{-1}(\{y\}) \subset \bigcup_{x / f(x)=y} B(x, \varepsilon_x)$. Par la propriété de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir $f^{-1}(\{y\})$ par un nombre fini de telles $B(x, \varepsilon_x)$. Or comme f ne prend qu'une fois la valeur y dans chaque $B(x, \varepsilon_x)$, $f^{-1}(\{y\})$ est donc un ensemble fini.

4a. Supposons un instant le contraire. Alors il existe une suite y_n tendant vers y, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n telle que $f(x_n) = y_n$ et $x_n \notin \bigcup_{i=1}^{m_y} B(x_i, \varepsilon)$. La suite x_n a alors une extraction convergente, forcément vers l'un des x_i, disons x_p, pour un $p \in [\![1, m_y]\!]$. Mais alors dans ce cas, cette extraction entre dans $B(x_p, \varepsilon)$ à partir d'un certain rang. Absurde.

b. Prenons $\varepsilon = \min_i (\varepsilon_{x_i})$ avec ε_{x_i} donné par 3.)a.) et W_y donné alors par 4a. On a $f^{-1}(W_y) \subset \bigcup_{1\leq i\leq m_y} B(x_i, \varepsilon)$, et comme $B(x_i, \varepsilon) \subset B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ pour tout $i \in [\![1, m_y]\!]$, et que f est un difféomorphisme sur tous les $B(x_i, \varepsilon_{x_i})$, tout $z \in W_y$ a un antécédent par $B(x_i, \varepsilon)$ et un seul, donc $m_z = m_y$.

c. La fonction $z \to m_z$ est localement constante, elle est donc continue, et étant définie sur $\mathbb{R}^n$ connexe, elle est constante.

5. En admettant que $m_0 = 1$, on déduit que $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $m_z = 1$ et donc que f est injective. Combiné à 2c), l'application f est bijective et donc le théorème d'inversion globale conclut.

<u>Bonus:</u> Milka et Kiri sont homéomorphes (à une sphère). En revanche la vache qui rit a deux bouchons d'oreilles, c'est donc un tore à deux trous qui n'est pas homéomorphe à une sphère!