Université Paris-Dauphine
Calcul Différentiel et Optimisation (L3)
Responsable : Emeric Bouin

Année universitaire 2018-2019
Date : 31 octobre 2018
Durée : 3 heures

ÉLÉMENTS DE CORRECTION DE L'EXAMEN PARTIEL (VERSION DU 31/10)

Exercice 1. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{1+n}$ par

$$\varphi(A, x) = \left(\sin\left(\|(A + A^\top)x\|_2^2\right), Ax\right).$$

Montrer que φ est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ et calculer sa différentielle.

Corrigé. *L'application φ est différentiable par composition d'applications différentiables (en particulier, $x \mapsto \|x\|_2^2$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$). Pour calculer la différentielle de φ on utilise les règles de différentiation et la règle de la chaine à la chaine.*
Soit $(H, h) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
d\varphi_{(A,x)}(H,h) &= \left(d\left(\sin\left(\|(A + A^\top)x\|_2^2\right)\right)_{(A,x)}(H,h), d\left(Ax\right)_{(A,x)}(H,h)\right) \\
&= \Big(\cos\left(\|(A + A^\top)x\|_2^2\right) d\left(\|(A + A^\top)x\|_2^2\right)_{(A,x)}(H,h), \\
&\qquad d\left(A\right)_{(A,x)}(H,h)x + Ad\left(x\right)_{(A,x)}(H,h)\Big) \\
&= \left(\cos\left(\|(A + A^\top)x\|_2^2\right) d\left(\|(A + A^\top)x\|_2^2\right)_{(A,x)}(H,h), Hx + Ah\right) \\
&= \left(2\cos\left(\|(A + A^\top)x\|_2^2\right) \left\langle (A + A^\top)x, d\left((A + A^\top)x\right)_{(A,x)}(H,h)\right\rangle, Hx + Ah\right) \\
&= \left(2\cos\left(\|(A + A^\top)x\|_2^2\right) \left\langle (A + A^\top)x, (H + H^\top)x + (A + A^\top)h\right\rangle, Hx + Ah\right).
\end{aligned}$$

---

2. On considère l'application $T : f \mapsto \frac{1}{2}\left(f(0)^2 + f(1)^2\right)$ sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
   (a) L'application T est-elle différentiable sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$? Si oui, quelle est sa différentielle ?

Corrigé. *Oui, et la différentielle est $h \mapsto f(0)h(0) + f(1)h(1)$.*

   (b) L'application T est-elle différentiable sur $(E, \|\cdot\|_1)$? Si oui, quelle est sa différentielle ?

Corrigé. *Elle n'est pas différentiable. L'application n'est même pas continue pour cette norme !*

---

3. On considère $E =]-1, 0[\cup]0, 1[$ muni de la topologie induite par celle de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
   (a) L'ensemble $]0, 1[$ est-il ouvert dans E ? Est-il fermé dans E ?

Corrigé. *Oui et oui. C'est un fermé car* $]0,1[=[0,1]\cap E$ *et* $[0,1]$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$*. C'est un ouvert car* $]0,1[=]0,1[\cap E$ *et* $]0,1[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}$*.*

(b) E est-il connexe ? S'il ne l'est pas, quelles sont ses composantes connexes ?

Corrigé. *E n'est pas connexe car réunion de deux ouverts-fermés non vides* $]-1,0[$ *et* $]0,1[$*. Comme* $]-1,0[$ *et* $]0,1[$ *sont connexes, ce sont les deux composantes connexes de* E*.*

---

4. Si une partie est d'adhérence connexe, est-elle nécessairement connexe ?

Corrigé. *Non.* $E=]-1,0[\cup]0,1[$ *en est la preuve !*

---

5. L'espace $\mathbb{R}[X]$ est-il complet pour $\|\cdot\|_2$, avec $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\|_2=\left(\sum_{k\geq 0}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$?

Corrigé. *Assurément non. La suite* $P_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{X^k}{k}$ *est de Cauchy, mais n'est pas convergente. En effet,*

$$\|P_{n+p}(X)-P_n(X)\|_2^2=\sum_{n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

donc $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy. Si elle converge vers un polynôme* $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$*, on aurait, pour* n *assez grand associé à* $\varepsilon=\frac{1}{2(d+1)^2}$*,*

$$\|P_n(X)-P(X)\|_2^2=\sum_{k=0}^{d}\left|a_k-\frac{1}{k}\right|^2+\sum_{d+1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{2(d+1)^2},$$

ce qui est impossible.

---

6. Soit (X,d_X) un espace métrique. On définit $\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions telles que

$$\|f\|:=\|f\|_\infty+\sup_{(x,y)\in X^2,x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{d_X(x,y)}$$

est finie. Montrer que $(\mathrm{Lip}(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Corrigé. *Montrons qu'une suite de Cauchy* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $Lip(X,\mathbb{R})$ *est convergente.*

(a) Construction de la limite. Soit $\varepsilon>0$*,* $x\in X$ *et* N *tel que* $\|f_{n+p}-f_n\|<\varepsilon$ *pour* $n\geq N$ *et tout* $p>0$*. On a alors*

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leq\|f_{n+p}-f_n\|_\infty\leq\|f_{n+p}-f_n\|<\varepsilon,$$

donc la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$*. Ainsi, à* x *fixé, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente. On définit alors* $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$*.*

(b) La limite construite est bien dans Lip$(X,\mathbb{R})$. Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Lip$(X,\mathbb{R})$, elle est bornée dans Lip$(X,\mathbb{R})$. Il existe une constante M telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|\leq M$. Ainsi, pour chaque $(x,y,z)\in X^3$, avec $y\neq z$, on a

$$|f_n(x)|+\frac{|f_n(y)-f_n(z)|}{d_X(y,z)}\leq M.$$

En passant à la limite simple, on en déduit que $\|f\|<\infty$.

(c) La convergence a lieu dans Lip$(X,\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon>0$. Montrons que $\|f_n-f\|<\varepsilon$ pour $n\geq N$, avec N suffisamment grand. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Lip$(X,\mathbb{R})$, on peut donc trouver N tel que $\|f_{n+p}-f_n\|<\varepsilon$ pour $n\geq N$ et tout $p>0$. Cela veut dire que pour $n\geq N$, pour tout $p>0$ et pour chaque $(x,y,z)\in X^3$, avec $y\neq z$, on a

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|+\frac{|(f_{n+p}(y)-f_n(y))-(f_{n+p}(z)-f_n(z))|}{d_X(y,z)}\leq\varepsilon.$$

On passe à la limite $p\to\infty$, on en déduit directement que $\|f_n-f\|<\varepsilon$ pour $n\geq N$, avec N suffisamment grand.

---

7. Un chameau est-il homéomorphe à un dromadaire ? *(Un argument d'une ligne raisonnablement convaincant suffira.)*

Corrigé. *Oui ! Les deux sont homéomorphes à une boule de $\mathbb{R}^3$. Le nombre de bosses ne compte pas, pas de jaloux ! Mais encore faut-il avoir la bosse des maths pour le comprendre ...*

---

8. Est-il vrai qu'une fonction continue de $[0,1]$ dans lui même admet un point fixe ?

Corrigé. *Oui, c'est vrai. La fonction continue g définie par $g(x)=f(x)-x$ vérifie $g(0)=f(0)\geq 0$ et $g(1)=f(1)-1\leq 0$ donc le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure.*

Exercice 2. On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = 2\sin(t) - \sin(2t), \\ y(t) = \sin(3t)^2. \end{cases}$$

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée.

Corrigé. *On étudie la courbe paramétrée en suivant les étapes du cours.*

1. *Réduction du domaine de définition. La courbe est $2\pi-$périodique donc on peut se restreindre à un intervalle de longueur 2π. Par ailleurs, on remarque que $(x(-t), y(-t)) = (-x(t), y(t))$, donc on peut se restreindre à l'intervalle $[0, \pi]$ et compléter par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.*
2. *Calcul des dérivées et tableau de variations. On a, pour tout $t \in [0, \pi]$,*

$$x'(t) = 2\cos(t) - 2\cos(2t), \qquad y'(t) = 6\sin(3t)\cos(3t) = 3\sin(6t).$$

Ainsi, sur l'intervalle $[0, \pi]$, x' s'annule pour

$$\begin{aligned} 2\cos(t) - 2\cos(2t) = 0 &\iff t = 2t\,[2\pi] \text{ ou } t = -2t\,[2\pi] \\ &\iff t = 0\,[2\pi] \text{ ou } 3t = 0\,[2\pi] \end{aligned}$$

c'est à dire ici $t = 0$ ou $t = \frac{2\pi}{3}$. La dérivée y' s'annule pour $6t = 0\,[\pi]$, c'est à dire

$$t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi.$$

3. *Etude des points singuliers $t = 0$ et $t = \frac{2\pi}{3}$.*
On fait le développement limité en $t = 0$ des coordonnées :

$$x(t) = 2\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) - \left(2t - \frac{8t^3}{6} + o(t^3)\right) = t^3 + o(t^3).$$

et

$$y(t) = \left(3t - \frac{9t^3}{2} + o(t^4)\right)^2 = 9t^2 + o(t^3).$$

On déduit que

$$(x(t), y(t)) = (0, 9)t^2 + (1, 0)t^3 + o(t^3),$$

c'est donc <u>un rebroussement de première espèce</u>.
Au point $t = \frac{2\pi}{3}$, posons $t = \frac{2\pi}{3} + u$,

$$\begin{cases} x(u) &= 2\sin(\frac{2\pi}{3} + u) - \sin(\frac{4\pi}{3} + 2u) \\ &= 2\left(\sin(\frac{2\pi}{3})\cos(u) + \cos(\frac{2\pi}{3})\sin(u)\right) - \left(\sin(\frac{4\pi}{3})\cos(2u) + \cos(\frac{4\pi}{3})\sin(2u)\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(u) - \frac{1}{2}\sin(u)\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2u) - \frac{1}{2}\sin(2u)\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\cos(u) + \cos(2u)\right) - \frac{1}{2}\left(2\sin(u) - \sin(2u)\right), \\ y(u) &= \sin(3u)^2. \end{cases}$$

d'où

$$x(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(3-2\frac{u^2}{2}-\frac{4u^2}{2}+o(u^3)\right)-\frac{1}{2}\left(u^3+o(u^3)\right)=3\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}u^2-\frac{1}{2}u^3+o(u^3).$$

et

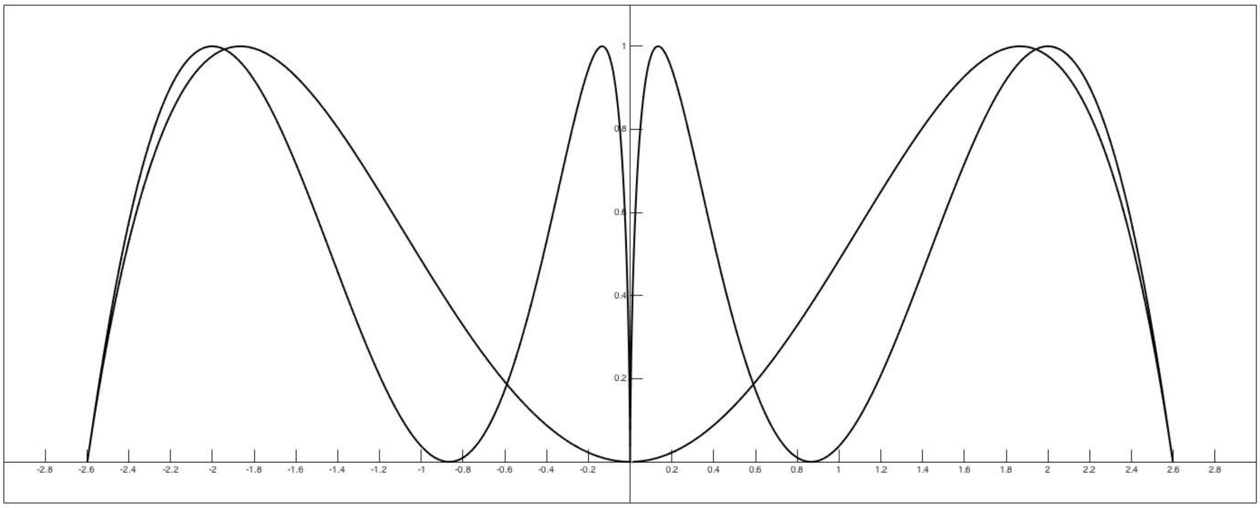
$$y(u)=9u^2+o(u^3).$$

On obtient donc

$$(x(u),y(u))=\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{3},0\right)+\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},9\right)u^2+\left(-\frac{1}{2},0\right)u^3+o(u^3),$$

ce qui est caractéristique d'un <u>rebroussement de première espèce</u>.

4. *Tracé de la courbe.*



NB : Pour Halloween, faites jouer votre imagination : alors, araignée ? chauve-souris ? ☺

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, on demande un homéomorphisme explicite dans le cas positif, une preuve dans le cas négatif.

1. Une astroïde et un carré sont-ils homéomorphes ?

Corrigé. *Oui. Une astroïde est paramétrée par* $t \mapsto (\cos(t)^3, \sin(t)^3)$ *(cf. cours), si on lui applique l'homéomorphisme* $x \mapsto sgn(x)|x|^{\frac{2}{3}}$*, on la transforme en*

$$t \mapsto (sgn(\cos(t))\cos(t)^2, sgn(\sin(t))\sin(t)^2),$$

qui est un paramétrage pour un carré, puisque

$$|sgn(\cos(t))\cos(t)^2| + |sgn(\sin(t))\sin(t)^2| = 1,$$

et que la sphère unité de la norme 1 *est un carré.*

---

2. La sphère $\mathbb{S}^2$ privée des pôles nord et sud est-elle homéomorphe ...
   (a) au cercle unité $\mathbb{S}^1$?

Corrigé. *Non. Le cercle est compact alors que la sphère privée des pôles ne l'est pas.*

   (b) au cylindre circulaire $\mathbb{S}^1 \times\,]-1,1[$?

Corrigé. *Oui. On peut envoyer un point de la sphère (privée des pôles) de coordonnées* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ *sur le point* (x',y',z') *du cylindre par l'homéomorphisme suivant :*

$$(x',y',z') = \psi(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right).$$

Il s'agit juste d'une projection sur le cylindre. On notera que la réciproque est donnée par

$$(x,y,z) = \psi^{-1}(x',y',z') = \left(\left(\frac{1-z'^2}{x'^2+y'^2}\right)^{\frac{1}{2}} x', \left(\frac{1-z'^2}{x'^2+y'^2}\right)^{\frac{1}{2}} y', z'\right).$$

On fera un dessin pour comprendre ce que sont ces applications !

Exercice 4. Soit (E, d) un espace métrique. Soit Φ une application définie sur $\mathbb{R}^+$, continue, strictement croissante, nulle en zéro et sous-additive au sens suivant :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \qquad \Phi(x + y) \leq \Phi(x) + \Phi(y).$$

On définit sur $E \times E$ l'application δ par $\delta = \Phi \circ d$.

1. (a) Donner deux exemples de telles fonctions Φ.

Corrigé. *L'identité et la fonction racine.*

(b) Montrer soigneusement que Φ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^+$ dans $\Phi(\mathbb{R}^+)$.

Corrigé. *Comme Φ est strictement croissante, elle est injective, donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur son image. Comme Φ est croissante, Φ^{-1} aussi.*
Soit $y \in \Phi(\mathbb{R}^+)$ et $y_n \in \Phi(\mathbb{R}^+)$ qui tend vers y. Montrons que $x_n := \Phi^{-1}(y_n)$ converge en montrant qu'elle n'a qu'une valeur d'adhérence. Comme $\Phi(x_n) = y_n$ et que Φ est continue, toute valeur d'adhérence α de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie forcément $\Phi(\alpha) = y$. Autrement dit, x_n a au plus une valeur d'adhérence, et c'est $\Phi^{-1}(y)$. Or x_n est bornée puisque y_n l'est (elle est convergente) et Φ^{-1} est croissante, donc x_n a au moins une valeur d'adhérence par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

---

2. Montrer que δ est une distance sur E.

Corrigé. *Comme Φ est croissante et $\Phi(0) = 0$, la fonction δ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. De plus, si $\delta(x, y) = 0$, alors forcément $x = y$. Pour l'inégalité triangulaire, on utilise la croissance de Φ puis la sous-additivité,*

$$\delta(x, y) = \Phi(d(x, y)) \leq \Phi(d(x, z) + d(z, y)) \leq \Phi(d(x, z)) + \Phi(d(z, y)) = \delta(x, z) + \delta(z, y).$$

---

3. Montrer que les distances d et δ définissent la même topologie sur E.

Corrigé. *On montre ceci facilement en utilisant le fait que $\delta(x, y) < r$ est équivalent à $d(x, y) < \Phi^{-1}(r)$, qui peut aussi s'écrire sous la forme $\delta(x, y) < \Phi(r)$ est équivalent à $d(x, y) < r$.*

---

4. Dans cette question seulement, on prend $E = \mathbb{R}$.

(a) Donner un exemple de distance d et une fonction Φ différente de l'identité telles que d et δ soient équivalentes.

Corrigé. *En prenant $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$ et $\Phi(x) = \frac{x}{1+x}$ on répond à la question. En effet, puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a toujours $d < \pi$, on peut écrire, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\delta = \frac{d}{1+d} \leq d \leq (1 + \pi)\frac{d}{1+d} = (1 + \pi)\delta.$$

(b) Montrer que d et δ ne sont pas toujours des distances équivalentes.

Corrigé. *Pour d la valeur absolue, les deux distances d et $\delta = \sqrt{d}$ ne sont pas équivalentes. En effet, si elles le sont, on peut trouver une constante $C > 0$ telle que*

$$C^{-1}\sqrt{d} \leq d \leq C\sqrt{d},$$

soit en particulier pour tout $x \neq y$, $C^{-1} \leq \sqrt{d(x,y)}$, ce qui est impossible puisque $\sqrt{d(x,y)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers y.

5. Montrer que (E, δ) est complet si et seulement si (E, d) l'est.

Corrigé. *Supposons (E, δ) complet. Prenons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy pour d et montrons qu'elle converge. Soit $\varepsilon > 0$, prenons N assez grand de sorte que pour tout $n \geq N$ et $p > 0$ on ait $d(x_{n+p}, x_n) < \Phi^{-1}(\varepsilon)$. On déduit alors que pour tout $n \geq N$ et $p > 0$ on a $\delta(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour δ, elle est donc convergente vers ℓ, disons. Mais comme $d(x_n, \ell) = \Phi^{-1}(\delta(x_n, \ell))$ et que Φ^{-1} est continue, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi pour d, donc l'espace (E, d) est complet !*

Exercice 5. On cherche à montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ est suffisamment petit, alors le problème

$$\begin{cases} f'(x) = f(x - x^2)^2, \quad x \in [0,1], \\ f(0) = \alpha, \end{cases} \tag{$\star$}$$

admet une solution f de classe $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On note E l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que

$$T : f \mapsto \left(x \mapsto \alpha + \int_0^x \left[f(s - s^2)\right]^2 \, ds \right)$$

définit un opérateur sur E, et qu'un point fixe de cet opérateur est solution du problème.

Corrigé. *Ainsi défini, l'opérateur produit une fonction de classe $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Un point fixe de T est alors forcément une fonction de classe $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, qui vérifie $f(x) = \alpha + \int_0^x \left[f(s - s^2)\right]^2 ds$ et donc en particulier $f(0) = \alpha$ et $f'(x) = \left[f(x - x^2)\right]^2$.*

---

2. (a) L'opérateur T est-il contractant sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$?

Corrigé. *Non. En effet, considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $f_n \equiv n$. On a*

$$\frac{\|T(f_n) - T(0)\|_\infty}{\|f_n - 0\|_\infty} = \frac{\|n^2 x\|_\infty}{\|n\|_\infty} = n,$$

donc le quotient $\frac{\|T(f)-T(g)\|_\infty}{\|f-g\|_\infty}$ n'est pas borné indépendamment de f et g.

(b) Soit $R > 0$. Montrer que si $2R < 1$ alors T est contractant sur la boule fermée $\overline{B}(0,R)$ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Corrigé. *Pour vérifier la contractance, on se donne f et g tous deux dans $\overline{B}(0,R)$ et on écrit*

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \qquad |T(f)(x) - T(g)(x)| &\leq \int_0^x \left| \left[f(s-s^2)\right]^2 - \left[g(s-s^2)\right]^2 \right| ds \\ &\leq \int_0^x \|f+g\|_\infty \|f-g\|_\infty \, ds \\ &\leq x \left(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty\right) \|f-g\|_\infty \\ &\leq 2R \, \|f-g\|_\infty. \end{aligned}$$

Comme $2R < 1$, l'opérateur est contractant sur $\overline{B}(0,R)$.

---

3. Donner une condition liant α et R pour que la boule fermée $\overline{B}(0,R)$ de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ soit stable par T.

Corrigé. *On estime la norme de $T(f)$ lorsque f est dans $\overline{B}(0,R)$.*

$$\forall x \in [0,1], \qquad \begin{aligned} |T(f)(x)| &\leq \alpha + \int_0^x \left| \left[f(s-s^2) \right]^2 \right| ds \\ &\leq \alpha + \int_0^x \|f\|_\infty^2 \, ds \\ &\leq \alpha + R^2. \end{aligned}$$

Il suffit alors que $\alpha + R^2 < R$ pour que $\overline{B}(0,R)$ soit stable par T.

---

4. Construire une solution au problème $(\star)$.

Corrigé. *On regarde T sur la boule $\overline{B}(0,R)$, qui est fermée dans $(E, \|\cdot\|_\infty$ qui est complet, donc c'est une boule complète. On assure à la fois que $R < \frac{1}{2}$ de sorte que T soit contractant et que $\alpha + R^2 < R$ pour que $\overline{B}(0,R)$ soit stable par T, ce qui est possible pour α assez petit. Le théorème du point fixe de Picard permet de conclure.*

Exercice 6. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée. Soit une application $f : E \mapsto E$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall x \in E,\ \forall h \in E,\ \langle df_x(h) | h \rangle \geq \alpha \|h\|^2,$$

pour un certain $\alpha > 0$.

1. (a) L'application linéaire df_x est-elle inversible pour chaque $x \in E$?

Corrigé. *Oui, en dimension finie, il suffit de vérifier que df_x est injective, ce qui est le cas puisque $df_x(h) = 0$ implique $h = 0$ par la propriété $\langle df_x(h)|h\rangle \geq \alpha \|h\|^2$.*

(b) Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local en tout point de E.

Corrigé. *Le théorème d'inversion locale permet de conclure puisque la différentielle de f est inversible en tout point de U.*

(c) Montrer que $f(E)$ est ouvert.

Corrigé. *Soit $y \in f(E)$, disons $y = f(x)$. Comme f est un difféomorphisme local en x, on en déduit que f est bijective d'un voisinage ouvert de x vers un voisinage ouvert de $f(x)$. Cela dit bien que $f(E)$ est ouvert.*

---

2. (a) Montrer pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x) - f(y) | x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$.

Corrigé. *Pour tout $(x, y) \in E^2$, on peut écrire $f(y) - f(x) = \int_0^1 df_{x+t(y-x)}(y - x)\, dt$, donc*

$$\langle f(y) - f(x) | y - x \rangle = \int_0^1 \left\langle df_{x+t(y-x)}(y - x) | y - x \right\rangle\, dt \geq \int_0^1 \alpha \|y - x\|^2\, dt = \alpha \|y - x\|^2.$$

(b) Montrer que $f(E)$ est fermé.

Corrigé. *De la question précédente, on déduit que pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \neq y$, on a $\|f(y) - f(x)\| \geq \alpha \|y - x\|$. On en déduit que si v_n est une suite de $f(E)$, disons $v_n = f(x_n)$, qui converge dans E, alors x_n est bornée. Elle a alors une valeur d'adhérence ℓ par le théorème de Bolzano-Weierstrass, et nécessairement v_n converge alors vers $f(\ell)$.*

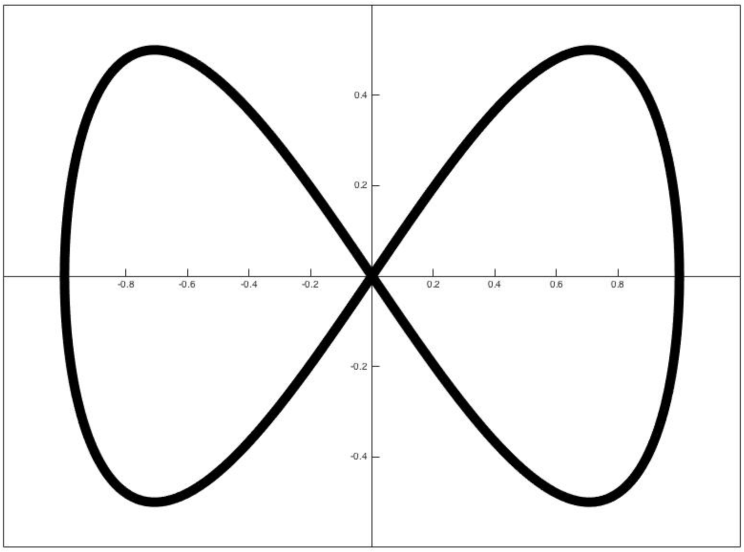
---

3. Montrer que f est surjective.

Corrigé. *L'image $f(E)$ est ouverte et fermée dans E qui est connexe, c'est donc E tout entier, et f est surjective.*

Bonus.

Corrigé. *La courbe d'équation* $x(t) = \sin(t), y(t) = \sin(t)\cos(t)$ *est une lemniscate de Gerono.*



C'est à dire des lunettes de soleil, ou bien un nœud papillon !