Eléments de correction

Partiel 2019

Exercice 1.

1. L'application Φ et la composée d'applications $\mathcal{C}^1$. En effet, pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\Phi(A) = b(A^2, A^2)$, avec b l'application bilinéaire $(X,Y) \mapsto XMY$. La différentielle est alors donnée par

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), \quad d\Phi_A(H) = db_{(A^2,A^2)}\left(d\left(A \to (A^2,A^2)\right)_A(H)\right)$$
$$= db_{(A^2,A^2)}(AH+HA, AH+HA)$$
$$= b(A^2, AH+HA) + b(AH+HA, A^2)$$
$$= A^2MAH + AHMA^2 + A^2MHA + HAMA^2$$

2. Une fonction f solution est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, et vérifie $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + c(y)$, avec c une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Mais alors $-\frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} + c'(y)$ pour $y>0$, et donc $c'(y)=0$. On conclut, puisque ces fonctions sont solutions, que les solutions sont de la forme $f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

3. On utilise la règle de différentiation des fonction composées. Comme $f\circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et que $\nabla f = \begin{pmatrix} 2y-3 \\ 2x \\ -3 \end{pmatrix}$ et $J_g = \begin{pmatrix} 1 & 4y^3 \\ -6x & 1 \\ 4X & -3 \end{pmatrix}$

On a $\nabla(f\circ g) = \begin{pmatrix} 1 & -6x & 4x \\ 4y^3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2(y-3x^2)-3 \\ 2(x+y^4) \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y-3x^2)-3-12x(x+y^4)-12x \\ 4y^3(2(y-3x^2)-3)+2(x+y^4)+9 \end{pmatrix}$.

4. On fait le changement de variables polaire. Une solution de l'équation satisfait $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot \nabla f_{(x,y)} = b$ s'écrit en polaires $r\vec{u}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial r}\vec{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{v}\right) = b$ (ici $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}$). Ainsi, si f est solution, alors $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{b}{r}$, soit $f(r,\theta) = b\ln r + c(\theta)$. En variables initiales, cela donne $f(x,y) = \frac{b}{2}\ln(x^2+y^2) + c\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. La réciproque est vraie.

5. Non. Un cercle privé de deux points distincts n'est pas connexe alors que le disque fermé privé de deux points l'est.

6. NON. Prendre $x \to \frac{x}{2}$.

Exercice 2 :

① La courbe est 2π-périodique, on peut restreindre l'étude à un intervalle de longueur 2π. Par ailleurs, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, on restreint alors l'étude à $[0,\pi]$. Puis $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$, donc on restreint encore à $[0;\frac{\pi}{2}]$.

② On calcule le vecteur dérivé.

$$x'(t) = -\sin(t)\sin(2t)^3 + \cos(t) \times 3\sin(2t)^2 \times 2\cos(2t)$$
$$= 2\cos(t)\sin(2t)^2\left[3\cos(2t) - \sin^2(t)\right]$$
$$= 2\cos(t)\sin(2t)^2\left[3(1-2\sin^2(t)) - \sin^2(t)\right]$$
$$= 2\cos(t)\sin(2t)^2\left[3 - 7\sin^2(t)\right].$$

$$y'(t) = 2\sin(3t) \times 3\cos(3t) = 3\sin(6t).$$

③ Faisons le tableau de variations sur $[0,\frac{\pi}{2}]$:

$x'(t) = 0 \iff \cos(t) = 0$ ou $\sin(2t) = 0$ ou $\sin^2(t) = \frac{3}{7}$.

$\iff t = \frac{\pi}{2}$ ou $t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{2}$ ou $\cancel{t = \pi}$ ou $\sin(t) = \left(\frac{3}{7}\right)^{1/2} \Rightarrow t_0 = \arcsin\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{1/2}\right)$

$\iff t = 0, \frac{\pi}{2}, \cancel{\pi}, t_0$.

$y'(t) = 0 \iff t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

	0		$\frac{\pi}{6}$		t_0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	0		$+$		0		$-$		0
x			$\nearrow$				$\searrow$		
y		$\nearrow$		$\searrow$				$\nearrow$	
y'	0	$+$	0		$-$		0	$+$	0

④ On étudie les deux points singuliers ($t=0$ et $t=\frac{\pi}{2}$) :

* En $t=0$: $x(t) = 8t^3 + o(t^3)$, $y(t) = 9t^2 + o(t^3)$ donc $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3)$

C'est donc un point de rebroussement de première espèce.

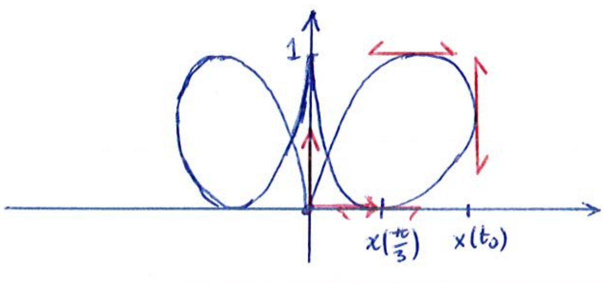
* En $t=\frac{\pi}{2}$: Posons $t = \frac{\pi}{2} + u$. Alors $x(u) = (-\sin(u))(-\sin(2u))^3 = 8u^4 + o(u^4)$

et $y(u) = \sin\left(3u + \frac{3\pi}{2}\right)^2 = \cos(3u)^2 = \left(1 - \frac{9u^2}{2} + \frac{27u^4}{8} + o(u^4)\right)^2$

$$= 1 - 9u^2 + \frac{27}{4}u^4 + \frac{9^2}{4}u^4 + o(u^4)$$
$$= 1 - 9u^2 + 27u^4 + o(u^4)$$

On déduit $\begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \end{pmatrix} u^2 + \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \end{pmatrix} u^4 + o(u^4)$ qui est un rebroussement de seconde espèce (mais un peu fictif, la courbe revient sur elle même)

⑤ Courbe



Exercice 3 :

1.) Preuve par récurrence sur $k \geq 1$.

$\underline{k=1}$: $(M+H)^1 = M + \sum_{i=0}^{1-1} M^i H M^{1-1-i} + \underbrace{0}_{=o(H)}$

$\underline{k \to k+1}$: $(M+H)^{k+1} = (M+H)(M+H)^k = (M+H)\left(M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i} + o(H)\right)$

$$= M^{k+1} + M \sum_{i=1}^{k-1} M^i H M^{k-1-i} + o(H)$$
$$+ H M^k + o(H).$$
$$= M^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} M^i H M^{(k+1)-1-i} + o(H)$$

2.) Par composition d'applications différentiables, f est différentiable et $df_M(H) = \left(d(\mathrm{Tr})_M(H), \dots, d(M \to \mathrm{Tr}(M^n))_M(H)\right)$. Or pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $d(M \mapsto \mathrm{Tr}(M^j))_M(H) = d(\mathrm{Tr})_{M^j}\left(d(M \mapsto M^j)_M(H)\right)$.

Par 1.), $d(M \to M^j)_M(H) = \sum_{i=0}^{j-1} M^i H M^{j-1-i}$ pour $j > 0$; donc

$$d(M \mapsto \mathrm{Tr}(M^j))_M(H) = \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=0}^{j-1} M^i H M^{j-1-i}\right) = \sum_{i=0}^{j-1} \mathrm{Tr}(M^{j-1} H)$$
$$= j\,\mathrm{Tr}(M^{j-1} H).$$

Finalement, $df_M(H) = (\mathrm{Tr}(H), \dots, n\,\mathrm{Tr}(M^{n-1} H))$.

3.) a.) $\mathrm{Ker}(df_M) = \{H \in M_n(\mathbb{R}) / df_M(H) = 0\}$

$= \{H / \forall j \in [\![0, n-1]\!], \ \mathrm{Tr}(M^j H) = 0\}$

$= \{H \in M_n(\mathbb{R}) / \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ \underbrace{\mathrm{Tr}(P(M)H)}_{=0}\}$

$= \{H \in M_n(\mathbb{R}) / \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \ \mathrm{Tr}({}^tP({}^tM)H) = 0\} = \{P({}^tM), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}^\perp$

b.) On commence par trouver la dimension de
$$F = \{P(M^t), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\},$$
en montrant que c'est de dimension r. Considérons alors l'application linéaire
$$\Phi : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ P & \longrightarrow & P({}^tM) \end{pmatrix}$$
Par définition, $F = \mathrm{Im}(\Phi)$. Trouvons $\mathrm{Ker}\,\Phi$, c'est $\{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] / P({}^tM) = 0\}$, c'est à dire l'idéal annulateur de ${}^tM$, engendré par $\mu_{{}^tM}$, de degré r lui aussi. Φ est alors injective sur $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ et $\mathrm{Im}\,\Phi = \Phi(\mathbb{R}_{r-1}[X])$ (faire la division euclidienne de $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ par $\mu_{{}^tM}$). On déduit que $\mathrm{Im}\,\Phi$ est de dimension r et donc que la dimension de $\mathrm{Ker}(df_M)$ est $n^2 - r$.

c.) C'est le théorème du rang.

4.) Soit M une matrice telle que $\mu_{M_0} = \chi_{M_0}$. Alors $\deg(\mu_{M_0}) = n$ et la matrice de df_{M_0} est donc de rang n. Par continuité de $M \to df_M$ et du déterminant, le rang de df_M est n dans un voisinage de M_0. Le polynôme minimal de M est donc de degré n dans un voisinage de M_0, ce qui conclut $\mu_M = \chi_M$.

Exercice 4 :

1.)

$(\Rightarrow)$ On suppose que f est Lipschitzienne sur U, c'est à dire que pour tout $(x,y) \in U^2$, $\|f(x)-f(y)\| \leq k\|x-y\|$ pour un certain k donné à l'avance. En faisant $y = x+h'$ pour $h' \neq 0$ assez petit pour que $x+h' \in U$, on a $\|f(x+h')-f(x)\| \leq K\|h'\|$. On fait alors, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in U$, $\forall t > 0$

$$\|df_x(th)\| = \|f(x+th)-f(x)+o(\|th\|)\| \leq k\|th\| + o(t), \text{ d'où l'on}$$

déduit $\quad |||df_x||| \leq k \quad \forall x \in U$.

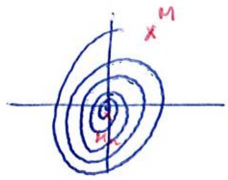
$(\Leftarrow)$ Comme U est convexe par le théorème des accroissements finis

$$\forall (x,y) \in U, \quad \|f(x)-f(y)\| \leq \sup_{u \in [x,y]} |||df_u||| \, \|x-y\|,$$

ce qui conclut.

2.) Non, c'est faux. Prendre pour U une spirale qui s'enroule autour de 0 dans $\mathbb{R}^2$, avec comme application la distance géodésique entre deux points dans cette spirale.

La distance entre M_n et M ds $\mathbb{R}^2$ est bornée, mais la distance géodésique tend vers ∞.



On peut aussi proposer la fonction $(x,y) \to \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ sur l'anneau $\{(x,y),\ \frac{1}{2} < x < 1\}$. Elle a sa dérivée bornée par 1 dans L^2 mais n'est pas 1-Lip (ce qui n'est pas - exactement - la contradiction voulue, mais acceptable !).

Exercice 5:

1.) Comme K est convexe, $\frac{1}{n}a+\left(1-\frac{1}{n}\right)x \in K$ par combinaison convexe.
De plus, f_n est contractante, en effet, $\forall n, \forall (x,y)$,

$$\|f_n(x)-f_n(y)\| = \left\| f\left(\frac{a}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)x\right) - f\left(\frac{a}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)y\right)\right\|$$
$$\le \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-y\|.$$

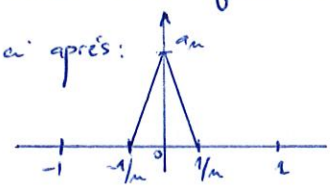
K est un compact d'un evn, il est complet, par le théorème du point fixe de Banach, f_n a un unique point fixe $t_n \in K$.

2.) • Comme K est compact, x_n a une sous-suite convergente. Notons φ une extraction telle que $x_{\varphi(n)} \to \bar{x} \in K$ et $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$.
Comme f_n tend vers f uniformément sur K, on déduit que $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})$ tend vers $f(\bar{x})$ et donc que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

• Ce point fixe n'est pas unique en général, prendre $f(x) = x$.

Exercice 6:

1.) On a toujours $\|f\|_2 \le \left(2\|f\|_\infty^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}\,\|f\|_\infty$. Montrons que l'inégalité $\|f\|_\infty \le C\|f\|_2$ est fausse. Il suffit de prendre une suite f_n comme ci-après:



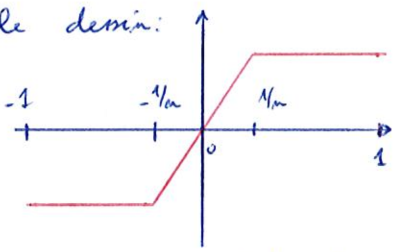
On a alors

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_{-1}^{1}|f_n(x)|^2dx\right)^{1/2}$$
$$= \left(2\int_0^{1/n}(a_n-x)^2dx\right)^{1/2}$$
$$= \left(2\left[-\frac{(a_n-x)^3}{3}\right]_0^{1/n}\right)^{1/2}$$
$$= \left(\frac{2}{3}\left[a_n^3-\left(a_n-\frac{1}{n}\right)^3\right]\right)^{1/2}$$

En choisissant a_n tq $\|f_n\|_2 = 1$, $a_n \to +\infty$, et $\|f_n\|_\infty = a_n$, on a la contradiction.

2.) Voir le cours.

3.) a.) Voilà le dessin:



C'est bien une fonction continue à valeurs ds $\mathbb{C}$.

b.) Calculons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p > 0$

$$\|f_{n+p}-f_n\|_2^2 = \int_{-1}^{1}|f_{n+p}(t)-f_n(t)|^2dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}}|f_{n+p}(t)-f_n(t)|^2dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n+p}}|f_{n+p}(t)-f_n(t)|^2dt$$
$$+\int_{-\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n+p}}|f_{n+p}-f_n|^2 + \int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}}|f_{n+p}-f_n|^2 + \int_{\frac{1}{n}}^{1}|f_{n+p}-f_n|^2$$

$$=0+\int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n+p}}|1-nt|^2dt + \int_{-\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n+p}}|(n+p)x-nx|^2dx + \int_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}}|1-nt|^2dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_{-1}^{-\frac{n}{n+p}}|1-u|^2du + \frac{2p^2}{3}\cdot\frac{1}{(n+p)^3} + \frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n+p}}^{1}|1-u|^2dt \le \frac{1}{n}\int_{-1}^{1}|1-u|^2du + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n+p} \le \frac{C}{n}$$

uniformément % p.

c) La suite (f_n) est de Cauchy dans $(E, \| \|_2)$ mais n'est pas convergente dans E. En effet, supposons que f_n tende vers f dans E. Montrons alors que f vaut -1 sur $[-1,0[$ et 1 sur $]0,1]$. Supposons que $x_0 \in]-1,0[$ et tel que $f(x_0) \neq -1$. Par continuité de f, on peut alors supposer sans perte de généralité que $|f(x)+1| > \alpha > 0$ sur $]x_0-\eta, x_0+\eta[\subset]-1,0[$.

Mais alors $\|f_n - f\|^2 \geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f_n - f|^2 = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |1+f|^2 > 2\eta\alpha^2$ pour n assez grand. Absurde.

4) Pour $\|\cdot\|_\infty$, oui car $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$ pour $\forall f$. Pour $\|\cdot\|_2$, non, en faisant un raisonnement similaire à celui fait pour la non-équivalence des normes.

<u>Bonus</u>: Tinky Winky (le triangulaire) est homéomorphe à Po (le circulaire) car tous les deux sont des tores. Les deux restants, La La et Dipsy, sont homéomorphes à une sphère.