Université Paris-Dauphine
Calcul Différentiel et Optimisation (L3)
Responsable : Emeric Bouin

Année universitaire 2018-2019
Date : 10 janvier 2019
Durée : 3 heures

Examen final

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice.

If I can do it, you can do it. Enjoy!

Exercice 1. (Les choses simples ... - 18 points - 60 mins)

Répondre aux questions suivantes en justifiant tout intégralement mais de manière concise.

1. Déterminer les différentielles première et seconde *de deux des trois (au choix)* applications suivantes :

$$f(x,y) = xy + 3x - y^2, \qquad g(x,y,z) = (x - y^2 z, x^3 + xy^2 + z^3), \qquad h(A) = \sin(\mathrm{Tr}(A^\top A)),$$

définies respectivement sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. L'application $\varphi : L^4(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\varphi : f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)^4 \, dt$ est-elle différentiable sur $L^4(\mathbb{R})$ muni de $\| \cdot \|_4$? Si oui, préciser sa différentielle.
3. L'ensemble des matrices réelles inversibles de taille $n \in \mathbb{N}^*$ est-il connexe par arcs ?
4. Quelles sont les composantes connexes de $O_2(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$?
5. Soit $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par $d(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Φ pour que d soit une distance sur $\mathbb{R}$.
   (b) Cette condition réalisée, décrire les boules ouvertes pour cette distance.
   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Φ pour que la distance d définisse la même topologie que $| \cdot |$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Lorsque d est une distance, l'espace $(\mathbb{R}, d)$ est-il complet ?
6. Une bouée canard est-elle homéomorphe à la surface d'un bretzel ?


(On prendra soin de s'aider de dessins pour illustrer sa réponse).

7. Quelles sont les sous-variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$? Et celles de dimension 0 ?
8. L'adhérence d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ est-elle toujours une sous-variété ?
9. On considère $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^4 - 2x^2 + y^4 = 8\}$.
   (a) Montrer que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ et donner sa dimension.

(b) Quel est l'espace tangent en $(1, \sqrt{3})$?

(c) Montrer qu'il existe Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 telle que $(x, y) \in S$ soit équivalent à $x = \Phi(y)$ au voisinage de $(2, 0)$.

(d) Donner un développement limité de Φ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

(e) Déterminer les extrema de la fonction $f(x, y) = x^2$ sur S.

Exercice 2. (Alors, ça plane pour vous ? ... - 5 points - 30 mins)

On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) + \frac{3\sqrt{3}}{8}\sin^2(2t), \\ y(t) = 2\sin^3(t). \end{cases}$$

1. Faire l'étude complète de la courbe paramétrée.
   (For your mental health : l'étude fait très légèrement intervenir $\arccos(-\frac{1}{\sqrt{3}})$*.)*
2. Donner la tangente en $t = \frac{\pi}{6}$ ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.
3. Le support de la courbe paramétrée est-il une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?
   (Consigne : on demande une preuve succincte mais rigoureuse.)

Exercice 3. (Astérix et isométrix ... - 12 points - 45 mins)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme associée. On se donne U, un ouvert connexe de E, et une application $f : U \mapsto E$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall (x, h) \in U \times E, \qquad \|df_x(h)\| = \|h\|.$$

On souhaite montrer que f est une application affine.

1. Montrer que f est un difféomorphisme local en tout point de U.
2. Montrer que pour tout $x_0 \in U$, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in B(x_0, r)^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$

3. (a) Que vaut $\|d(f^{-1})_{f(x)}\|$, pour tout $x \in U$?

   (b) Montrer que pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage Ω_{x_0} de x_0 tel que

$$\forall (x, y) \in \Omega_{x_0}^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

4. (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \Omega_{x_0}^2$ et tout $h \in E$, on a

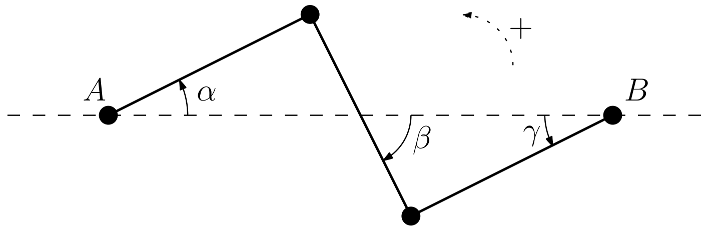
$$\langle df_x(h), df_y(h) \rangle = \|h\|^2.$$

   (b) Montrer que l'application $x \mapsto df_x$ est localement constante sur U.

5. Démontrer que f est une transformation de la forme $x \mapsto Ax + b$, avec A orthogonale (*i.e.* $A \in O_n(\mathbb{R})$) et $b \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 4. (Le cercle des mécanismes saugrenus ... - 15 points - 45 mins)

On considère un mécanisme plan formé de trois tiges, de même longueur L, attachées par leurs extrémités comme sur la figure ci-après.



On suppose les points A et B fixes et distants de $L(3-\varepsilon)$ pour un certain $\varepsilon > 0$. On note α, β, γ les angles entre chacune des tiges et l'horizontale (la droite (AB)). L'espace des configurations, noté C_ε est l'ensemble des triplets $(\alpha, \beta, \gamma) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^3$ d'angles correspondants à des positions accessibles du système. On souhaite montrer que pour ε assez petit, C_ε est difféomorphe à un cercle.

1. Montrer que $(\alpha, \beta, \gamma) \in C_\varepsilon$ si et seulement si

$$\begin{cases} \cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma) = 3 - \varepsilon, \\ \sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma) = 0. \end{cases}$$

2. En déduire que C_ε est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Donner sa dimension.
3. On définit, pour $(\alpha, \beta) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^2$, la fonction

$$F(\alpha, \beta) = \cos(\alpha) + \cos(\beta) + \sqrt{1 - (\sin(\alpha) + \sin(\beta))^2}.$$

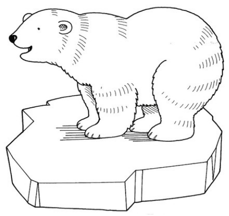
   (a) Montrer que F atteint un maximum en $(0,0)$. Quelle est sa valeur ?
   (b) Quelle est la signature de la Hessienne de F en $(0,0)$?
4. (a) Montrer que C_ε est le graphe d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au dessus de

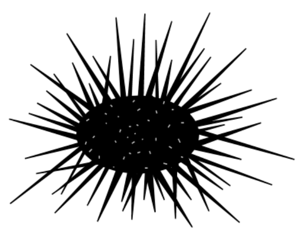
$$\Gamma_\varepsilon := \left\{ (\alpha, \beta) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[^2, \ F(\alpha, \beta) = 3 - \varepsilon \right\}.$$

   (b) Montrer que Γ_ε est difféomorphe à un cercle pour ε assez petit.
   (Indication : -- --- .-. ... .).
   (c) En déduire que C_ε est difféomorphe à un cercle pour ε assez petit.

Bonus. (Un ours, un ... - 2 points hors barème)

Un ours et un oursin peuvent-ils être difféomorphes ?





(Un argument d'une ligne raisonnablement convaincant suffira.)