Université Paris-Dauphine
Calcul Différentiel et Optimisation (L3)
Date : 30 octobre 2019

Année universitaire 2019-2020
Responsable : Emeric Bouin
Durée : 3 heures

Examen partiel

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées pour être considérées. Il est rappelé que la rédaction comptera de manière importante dans l'évaluation des copies. Aucun document n'est autorisé, aucune calculatrice. Le barême est donné à titre indicatif.

In bocca al lupo ... !

Exercice 1. (Simple, basique ... - 8 points)

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\phi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^2MA^2 \end{pmatrix}.$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en chaque point.
2. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0,\ y > 0\}$. Trouver les fonctions différentiables sur U qui vérifient
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$
3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, et $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ définies par
$$f(x,y,z) = 2xy - 3(x+z), \qquad g(x,y) = (x+y^4, y-3x^2, 2x^2-3y).$$
Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$.
4. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0,\ y > 0\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ vérifiant :
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = b.$$
On pourra chercher un changement de variables ...
5. Un cercle et un disque fermé de $\mathbb{R}^2$ sont-ils homéomorphes ?
6. Une fonction continue de $]0,1]$ dans $]0,1]$ admet un point fixe. Vrai ou faux ? On justifiera sa réponse.

Exercice 2. (Ugly betty ... - 6 points)

Faire l'étude complète de la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)\sin(2t)^3, \\ y(t) = \sin(3t)^2. \end{cases}$$

Aide : On prendra soin d'écrire x' sous la forme $x'(t) = 2\cos(t)\sin(2t)^2P(\sin(t))$, où P est un polynôme.

Exercice 3. (Un théorème Afgoustidien ... - 7 points)

On définit l'application f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par

$$f : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & (\mathrm{Tr}(M), \dots, \mathrm{Tr}(M^n)) \end{pmatrix}.$$

1. *(Préliminaire)* Montrer que l'on a, pour $(M, H) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k > 0$,

$$(M+H)^k = M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i} + o(H).$$

2. Montrer que f est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser $df_M(H)$ pour M et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. On se donne $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note μ_M son polynôme minimal, que l'on suppose de degré r.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(df_M) = \left\{P(M^\top), P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\right\}^\perp$, où l'orthogonal est au sens du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Ker}(df_M)$ est égale à $n^2 - r$.
   (c) Montrer que le rang de df_M est égal au degré du polynôme minimal de M.
4. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4. (Connexceptionnel ... - 5 points)

Soient U un ouvert d'un espace vectoriel normé E, F un autre espace vectoriel normé et $f : U \to F$ une application différentiable en tout point de U.

1. On suppose que U est convexe. Montrer que f est Lipschitzienne si et seulement si l'application $x \mapsto df_x$ est bornée sur U.
2. Le résultat précédent est-il toujours vrai si U est seulement connexe ?

Exercice 5. (Un regard fixant ... - 4 points)

Soit K un convexe compact d'un espace normé E, et $f : K \to K$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in K^2, \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$

On fixe un point $a \in K$.

1. On définit sur K la suite de fonctions (f_n) par

$$f_n(x) = f\left(\frac{a}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x\right).$$

   Après avoir justifié que f_n est bien définie, démontrer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, f_n admet un unique point fixe (t_n).
2. Montrer que f admet un point fixe dans K. Est-il unique ?

Exercice 6. (Etre complètement dans la norme ... - 6 points)

On note E l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On se donne deux normes sur E.

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \qquad \|f\|_\infty = \sup\left\{|f(x)|;\ x \in [-1, 1]\right\}.$$

1. Montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.
2. Montrer *proprement* que l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_\infty)$ est complet.
3. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant :

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Faire un dessin et vérifier que $f_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Montrer que la suite (f_n) est de Cauchy dans $(E, \|.\|)_2$.
   (c) L'espace $(E, \|.\|_2)$ est-il complet ?
4. L'application linéaire $T : E \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(0)$ est elle continue si on munit E de $\|.\|_\infty$? si on munit E de $\|.\|_2$?

Bonus. (L'infanzia ... - 3 points hors barème)

En surface, les Teletubbies® sont-ils homéomorphes deux à deux ? Si oui, le justifier brièvement, sinon les classer, en le justifiant brièvement, par classes d'homéomorphismes.

Fin du sujet
