Université Paris-Dauphine
J. Féjoz

Calcul différentiel et optimisation
Juillet 2017

Examen de rattrapage

Deux heures — Sans document ni appareil électronique.
Toutes les réponses doivent être justifiées mais ***concises****.*
Mentionner sur la copie les erreurs d'énoncé éventuelles.
Chaque exercice est sur 4 points.

1. Dérivée de l'inversion des matrices. — Calculer la dérivée de l'application $\mathcal{I} : Gl_n(\mathbb{R}) \circlearrowleft$, $M \mapsto M^{-1}$. Quel est l'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & \epsilon \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ au second ordre près en ϵ ?

2. Résolution approchée d'une équation. — Donner une valeur approchée de la solution proche de 1 de l'équation

$$x^7 + 0{,}99\,x - 2{,}01 = 0,$$

en calculant le développement limité au premier ordre de la fonction $x(p,q)$ définie implicitement par l'équation $x^7 + px + q = 0$ au voisinage de $(x,p,q) = (1,1,-2)$.

3. Une équation de transport. — Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$, de classe C^1 telles que

$$\partial_x f + 2x\partial_y f = 0,$$

et tracer leurs courbes de niveau (d'équation $f = cste$) ; on pourra utiliser le changement de variables $(x,y) \mapsto (x,t) = (x, y - x^2)$.

4. Une application localement lipschitzienne. — Soit $f : \mathbb{R}^n \circlearrowleft$ une application dont la restriction à tout compact de $\mathbb{R}^n$ est lipschitzienne. Donner un exemple d'une telle application dans le cas $n = 1$, qui ne soit pas lipschtzienne sur $\mathbb{R}$. Puis montrer, dans le cas général, que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x + \varepsilon f(x) = y$.

5. Étude d'une surface. — Montrer que l'ensemble S des points de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ est une surface. Dessiner S ; pour cela, on pourra notamment décrire l'intersection de S avec les plans d'équation $z = z_0$, $z_0 \in \mathbb{R}$. Calculer enfin l'équation du plan tangent à S en un point (x_0,y_0,z_0) de S.

Solution. —

1. Dérivée de l'inversion des matrices. — Si M est inversible et H assez petite pour que $M + H$ elle-même soit inversible,

$$(M + H)^{-1} = M^{-1}(I + HM^{-1})^{-1}.$$

Quitte éventuellement à prendre H encore plus petite, la série

$$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k(HM^{-1})^k$$

converge absolument, et alors

$$(M+H)^{-1} = M^{-1}\left(I - HM^{-1} + o(H)\right),$$

donc l'application d'inversion $\mathcal{I} : M \mapsto M^{-1}$ est dérivable et

$$\mathcal{I}(M)\cdot H = -M^{-1}HM^{-1}.$$

(Par récurrence, on peut en déduire que $\mathcal{I}$ est de classe C^∞.)

Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. D'après la formule de Taylor,

$$\mathcal{I}(M+\epsilon H) = \mathcal{I}(M) + \epsilon\mathcal{I}'(M)\cdot H + O(\epsilon^2),$$

donc

$$(M+\epsilon H)^{-1} = M^{-1} - \epsilon M^{-1}HM + O(\epsilon),$$

soit

$$(M+\epsilon H)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\epsilon/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\epsilon^2).$$

2. Résolution approchée d'une équation. — La fonction

$$f : (\mathbb{R}^3,(X,P,Q) = (1,1,-2)) \to (\mathbb{R},0), \quad (x,p,q) \mapsto x^7 + px + q$$

croît strictement avec x, et possède une unique racine réelle $x(p,q)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. D'après le théorème des fonctions implicites, puisque $\partial_x f(X,P,Q) = 7X^6 + P = 8 > 0$, cette fonction $(p,q) \mapsto x(p,q)$ est de classe C^∞. La formule de Taylor au premier ordre nous dit

$$\begin{aligned} x(p,q) = {} & \partial_p x(P,Q)\,\delta p + \partial_q x(P,Q)\,\delta q + \\ & \int_0^1 (1-t)\left(\partial_p^2 x(z_t)\,\delta p^2 + \partial_q^2 x(z_t)\,\delta q^2 + 2\partial_p\partial_q x(z_t)\,\delta p\,\delta q\right)\,dt, \end{aligned}$$

avec $\delta p = p - P = -0{,}01$, $\delta q = q - Q = -0{,}03$ et $z_t = (P + t\,\delta p, Q + t\,\delta q)$. La partie principale donne la valeur approchée de la solution et le reste intégral donne l'erreur commise, à majorer. Calculons donc les dérivées partielles de la fonction implicite. Par une première dérivation de l'équation, on obtient

$$\begin{cases} \partial_p x(P,Q) = -\frac{X}{7X^6+P} = -\frac{1}{8} \\ \partial_q x(P,Q) = -\frac{1}{7X^6+P} = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

Donc

$$x(1-0{,}01; -2-0{,}01) \sim x(P,Q) + \frac{0{,}01}{8} + \frac{0{,}01}{8} = 1{,}005.$$

3. Équation de transport. — Soient f une fonctions vérifiant l'équation et F la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par ce diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(x,y) \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[d, mapsto, "f"'] & (x,t) \arrow[dl, mapsto, "F"] \\
f(x,y) = F(x,t) &
\end{tikzcd}$$

On a $f(x,y) = F \circ \varphi\,(x,y) = F(x,y - x^2)$, donc

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = \partial_x F(x,y-x^2) - 2x\,\partial_t F(x,y-x^2) \\ \partial_y f(x,y) = \partial_t F(x,y-x^2), \end{cases}$$

donc

$$0 = \partial_x f(x,y) + 2x\,\partial_y f(x,y) = \partial_x F(x,y-x^2) \quad (\forall x,y),$$

donc

$$\partial_x F \equiv 0,$$

donc (d'après la formule de la moyenne) F est de la forme $F(x,t) = F_0(t)$ où F_0 est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc f elle-même est de la forme

$$f(x,y) = F_0(y - x^2).$$

Réciproquement, comme une simple dérivation le montre, les fonctions de cette forme sont bien des solutions.

Les courbes de niveau d'une telle fonction f sont, en général, les paraboles d'équation $y = x^2 + cte$ (si F_0 ne possède pas de points critiques).

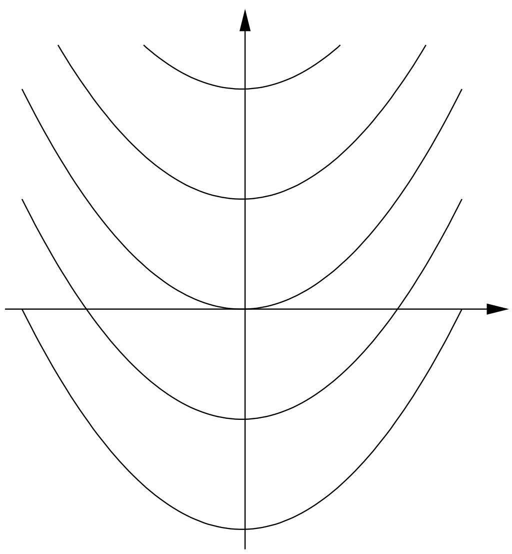

FIGURE 1. Courbes de niveau des solutions de l'équation de transport

4. Une application localement lipschitzienne. — Le résultat découle directmeent du théorème d'inversion locale lipschitzien appliqué à id : $(\mathbb{R}^n,y) \circlearrowleft$ perturbée par l'application lipschitzienne $\epsilon f : (\mathbb{R}^n,y) \to \mathbb{R}^n$.

On peut aussi le démontrer en revenant au théorème du point fixe, en prenant toutefois garde à se localiser correctement. Soient $y \in \mathbb{R}^n$ et $B = B(y,1)$. Dire que $x + \varepsilon f(x) = y$, c'est dire que x est un point fixe de $\phi : \mathbb{R}^n \circlearrowleft$, $x \mapsto y - \varepsilon f(x)$. Notons $M = \sup_{x\in B} \|f(x)\|$. Comme

$$\|y - \phi(x)\| = \varepsilon\|f(x)\|,$$

il suffit de choisir $\varepsilon \leqslant 1/M$ pour que ϕ envoie B dans elle-même. Comme de plus le rapport de Lipschitz de $\phi|_B$ vaut $\varepsilon \operatorname{lip} f|_{B(y,1)}$, $\phi|_B$ est une contraction stricte si de plus $\varepsilon < (\operatorname{lip} f|_{B(y,1)})^{-1}$. Alors ϕ possède un unique point fixe. Donc

$$\varepsilon_0 = \min\left(\frac{1}{M}, \frac{1}{2 \operatorname{lip} f|_{B(y,1)}}\right)$$

convient.

5. Étude d'une surface. — La forme quadratique $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ est une submersion en dehors de l'origine, donc l'ensemble S de niveau 1 de f est une surface. Cette surface, qui est invariante par rotation autour de l'axe des z, s'appelle un *hyperboloïde de révolution.*

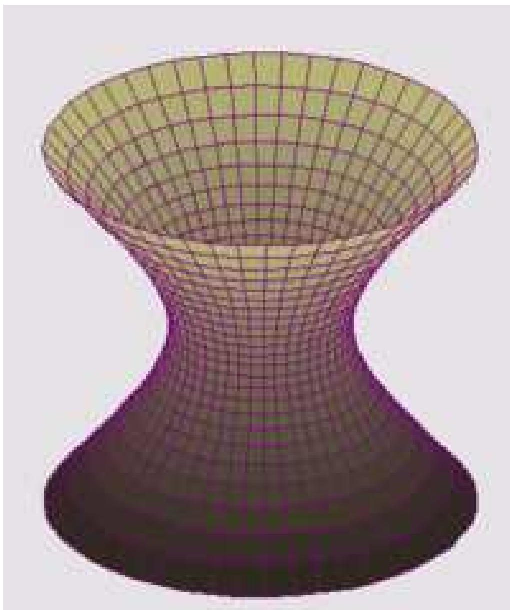

FIGURE 2. L'hyperboloide de révolution S

La trace de S sur le plan $z = z_0$ a pour équation

$$x^2 + y^2 = 1 + z_0^2;$$

c'est un cercle, dont le rayon $\sqrt{1+z_0^2} \sim_{z_0\to\pm\infty} |z_0|$ croît asymptotiquement linéairement, et dont le rayon vaut 1 sur le plan de coordonnées $z=0$.

Quant au plan tangent en (x_0,y_0,z_0), il a pour équation

$$f'(x_0,y_0,z_0)\cdot(\xi,\eta,\zeta)=0,$$

soit

$$x_0\xi+y_0\eta-z_0\eta=0.$$