

---

RÉVISIONS (FEUILLE 0) : CONTINUITÉ D'APPLICATIONS

---

## 1 Applications linéaires continues

**Exercice 1.** Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces normés **de dimension finie** et  $f : E \mapsto F$  une application linéaire. Montrer que  $f$  est continue. Les *deux* espaces  $E$  et  $F$  doivent-ils être simultanément de dimension finie pour assurer cette propriété ?

**Exercice 2.** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -e.v.n. et  $f$  une forme linéaire sur  $E$ . Montrer que  $f$  est continue si et seulement si  $\text{Ker}(f)$  est fermé.

**Exercice 3.** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Montrer que pour  $f \in E$  on a

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$$

Les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_1$  sont-elles équivalentes ?

**Exercice 4.** Déterminer si l'application linéaire  $T : (E, N_E) \rightarrow (F, N_F)$  est continue dans les cas suivants :

1.  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$  et  $T : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ ,  $f \mapsto fg$  où  $g \in E$  est fixé.
2.  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$ ,  $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$  et  $T : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (F, \|\cdot\|_1)$ ,  $f \mapsto fg$  où  $g \in E$  est fixé.
3.  $E = \mathbb{R}_n[X]$  muni de  $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$  et  $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ ,  $P \mapsto P'$ .
4.  $E = \mathbb{R}[X]$  muni de  $\|\sum_{k \geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k \geq 0} |a_k|$  et  $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$ ,  $P \mapsto P'$ .

**Exercice 5.** (*Inégalité de Hardy*)

Soit  $E = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|f\|_2 := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < +\infty \right\}$ . On note  $g$  la moyenne de  $f$  entre 0 et  $x$ ,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ si } x \neq 0, \quad g(0) = f(0).$$

1. Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et que pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_0^x g(t)^2 dt = 2 \int_0^x f(t)g(t) dt - xg(x)^2.$$

2. En déduire que, pour  $x \geq 0$ ,

$$\left(\int_0^x g(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left(\int_0^x f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. L'application de  $E$  dans lui même qui a  $f$  associe  $g$  est-elle bien définie ? Est-elle continue ?
4. Quelle est la norme de  $f \mapsto g$  ? On pourra considérer  $f_a(x) = \min(1, |x|^{-a})$ , pour  $a > \frac{1}{2}$ .

**Exercice 6.** Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $f \in E$ , on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur  $E$ . Soit  $\phi$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Démontrer que  $\phi$  est continue.
2. Pour  $n \geq 0$ , on considère  $f_n$  l'élément de  $E$  défini par  $f_n(x) = ne^{-nx}$ ,  $x \in [0, 1]$ . Calculer  $\|f_n\|_1$  et  $\|\phi(f_n)\|_1$ .
3. On pose  $\|\phi\| = \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$ . Déterminer  $\|\phi\|$ .

**Exercice 7.** Soit  $E$  un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire.

1. Soit  $a \in E$ . Démontrer que  $f_a$  définie par  $f_a(x) = \langle x, a \rangle$  est continue.
2. En déduire que l'orthogonal de toute partie de  $E$  est un fermé de  $E$ .

**Exercice 8.** Soit  $E$  l'espace vectoriel des suites  $(a_n)_{n \geq 1}$  de nombres complexes telle que  $\sum_{n \geq 1} |a_n|$  converge. On pose, pour  $a = (a_n) \in E$ ,

$$\|a\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

1. Démontrer que  $\|\cdot\|$  définit une norme sur  $E$ .
2. On pose  $F = \{a \in E; \sum_{n \geq 1} a_n = 1\}$ .  $F$  est-il ouvert ? fermé ? borné ?

## 2 Continuité de fonctions de plusieurs variables

**Exercice 9.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -e.v.n.. Montrer que  $x \mapsto \|x\|$  est continue.

**Exercice 10.** Les fonctions suivantes sont-elles continues sur  $\mathbb{R}^2$  ?

$$f_1(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, \quad f_2(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \quad f_3(x, y) = -4xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

$$f_4(x, y) = \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad f_5(x, y) = \frac{x - \sin(x)}{x^2+y^2}, \quad f_6(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^4},$$

$$f_7(x, y) = (x^2+y^2)^a \sin\left((x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ , et  $f_i(0, 0) = 0$  pour  $i = 1, \dots, 7$ .

**Exercice 11.** On définit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f(0, 0) = 0$ .

1. Montrer que la restriction de  $f$  à toute droite passant par l'origine est continue en  $(0, 0)$ .
2. Montrer que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Exercice 12** (Partiel L2 2018). La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par la formule ci-dessous est-elle continue en  $(0, 0)$  ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+|xy|)-|xy|}{(x-y)^2+x^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

**Exercice 13.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$  par  $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$ .

Montrer que l'on peut prolonger  $f$  par continuité sur la diagonale  $x = y$ .