
RÉVISIONS (FEUILLE 0 BIS) : CONNEXITÉ

Exercice 1. Parmi les ensembles suivants, dire, en le justifiant, lesquels sont connexes ou préciser leurs composantes connexes.

$$\begin{aligned} A &= \{0\} \cup [1, 2], \\ B &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, \\ C &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 1\}, \\ D &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \neq 1\}, \\ E &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x + y + z \leq 1\}, \\ F &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y^2\}, \\ G &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y^2\}. \end{aligned}$$

Exercice 2. L'intérieur d'une partie connexe (resp. connexe par arcs) est-il toujours connexe (resp. connexe par arcs) ?

Exercice 3.

1. Montrer que le plan complexe privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Combien a t'il de composantes connexes ?
4. Les espaces $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont-ils connexes ? Que peut-on dire avec \mathbb{C} à la place de \mathbb{R} ?
5. Quelles sont les parties connexes de \mathbb{Q} et de son complémentaire ?
6. Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E .

1. Démontrer que $A \times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A + B$ est connexe par arcs.

Exercice 5. Combien faut-il tracer de lacets au minimum sur un tore à 2 trous pour le disconnecter ?

Exercice 6. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On cherche à montrer qu'un **ouvert** U de E est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

1. Justifier qu'une implication est toujours vraie même si U n'est pas supposé ouvert.
2. Justifier que l'équivalence est fausse si U n'est pas supposé ouvert.
3. On suppose maintenant que U est connexe mais n'est pas connexe par arcs, c'est-à-dire qu'il existe deux points a et b de U qui ne sont pas reliés par un chemin continu. On définit alors les deux ensembles

$$X = \{x \in U, x \text{ est connecté à } a\}, \quad Y = \{x \in U, x \text{ n'est pas connecté à } a\}.$$

- (a) Montrer que X et Y sont des ouverts-fermés non vides de U .
- (b) Conclure.

Exercice 7. Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E . Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Si A est connexe, alors sa frontière est connexe.
2. Si \bar{A} est connexe, alors A est connexe.

3. Si A et B sont connexes, alors $A \cap B$ est connexe.
4. Si A et B sont connexes, alors $A \cup B$ est connexe.
5. Si $f : A \rightarrow F$ est continue, avec A convexe et F espace vectoriel normé, alors $f(A)$ est convexe.

Exercice 8. Démontrer que les composantes connexes d'un ouvert de \mathbb{R}^n sont ouvertes. En déduire que tout ouvert de \mathbb{R} est réunion d'une famille finie ou dénombrables d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 9. On note $A = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) ; x > 0\}$.

1. Démontrer que A est connexe.
2. Démontrer que $\bar{A} = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup A$.
3. Démontrer que \bar{A} est connexe.
4. On souhaite démontrer que \bar{A} n'est pas connexe par arcs. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{A}$ avec $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin 1)$. On note $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ de sorte que, si $u(t) \neq 0$, alors $v(t) = \sin(1/u(t))$. Enfin, on note $t_0 = \sup\{t > 0 ; u(t) = 0\}$ (l'instant où le chemin quitte l'axe des ordonnées).
 - (a) Démontrer que $u(t_0) = 0$.
 - (b) On pose $a = v(t_0)$. Justifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $t_0 \leq t \leq t_0 + \varepsilon$, alors $|v(t) - a| < 1/2$.
 - (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} < u(t_0 + \varepsilon)$. Justifier qu'il existe $t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ avec $u(t_1) = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$ et $u(t_2) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.
 - (d) Conclure.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On dit qu'une suite $u = (u_n)$ de E est à évolution lente si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{n+1} - u_n\| = 0.$$

Pour une suite u de E , on note $V(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence, dont on rappelle que c'est un fermé de E . Le but de l'exercice est de démontrer que si une suite u est bornée et à évolution lente, alors l'ensemble $V(u)$ est connexe. On effectue un raisonnement par l'absurde et on suppose que $V(u)$ n'est pas connexe.

1. Démontrer qu'il existe deux compacts K_1 et K_2 vérifiant

$$\begin{cases} K_1 \cap K_2 &= \emptyset \\ K_1 \cup K_2 &= V(u). \end{cases}$$

2. Démontrer que la distance entre K_1 et K_2 est strictement positive. Elle sera notée a .
3. On note $\Omega_1 = \{x \in E ; d(x, K_1) < \frac{a}{3}\}$ et $\Omega_2 = \{x \in E ; d(x, K_2) < \frac{a}{3}\}$. On considère M un majorant de la suite $\|u\| = (\|u_n\|)_n$. Démontrer que

$$K = \overline{B(0, M)} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$$

est un compact.

4. Démontrer qu'il existe une suite extraite de u à valeurs dans K et conclure.