Université Paris-Dauphine
Calcul Différentiel et Optimisation (L3)
Responsable : Emeric Bouin

Année universitaire 2018-2019
Date : 10 janvier 2019
Durée : 3 heures

Commentaires et wall of fame de l'examen final

Les statistiques de l'examen sont les suivantes.

$$\text{Moyenne : } 8,2, \qquad \text{note min : } 0,75, \qquad \text{note max : } 20.$$

Ci-dessous quelques conseils potentiels pour vous aider à progresser.

1. **Mise au point : cela ne fait aucun doute que la plupart d'entre vous s'investit et passe du temps à faire des mathématiques**.
2. Néanmoins, je constate (au partiel et à l'examen) qu'en moyenne les méthodes de travail sont peu efficaces voire délétères. Souvent le cours (la base donc) n'est ni maîtrisé (la preuve est le taux de succès aux exercices 1) ni vraiment compris. Il n'est pas réellement utile de se focaliser sur les exercices de TD sans avoir compris les méthodes, les résultats et surtout les exemples du cours. Normalement, les exercices doivent être cherchés en parallèle pour bien comprendre. Il est encore pire de ne faire que refaire des exercices de TD recopiés sans y avoir réfléchi : cela donne l'impression de comprendre par mimétisme, mais cela ne fait pas travailler les raisonnements.
3. Malheureusement, compréhension du cours mise à part, ce qui vous gêne souvent beaucoup pour réussir convenablement un examen n'est pas dépendant du cours évalué, mais est en fait une conséquence des années précédentes. En vrac : se décourager après deux lignes de calculs, faire des erreurs de calculs toutes les lignes (la dérivée partielle n'a pas valu 24 très souvent ...), ne pas savoir calculer la dérivée d'une fonction réelle (cela représente le plus gros taux d'erreurs sur les courbes paramétrées), ne pas faire un DL efficacement, oublier qu'une CNS est une double implication, ne pas rédiger une preuve correctement, ne pas calculer correctement le rang d'une matrice, ne pas savoir résoudre un système d'équations élémentaires (l'application des extrema liés a été un désastre de calculs faux) ... On ne peut que vous conseiller de reprendre les points que vous avez oubliés.
4. Savoir identifier ce qu'il est important de prouver : souvent vous pensez surement avoir répondu à la question, mais vous avez en fait ignoré la difficulté principale et donc cela conduit à la note 0. Un exemple : un exercice demandait si C_ε est une sous-variété. Là, super, vous reconnaissez souvent la représentation implicite, vous écrivez la matrice de la différentielle. Cette matrice est de taille 2×3 avec des sin et cos partout et 3 paramètres. A la ligne suivante je lis - très - souvent "cette matrice est (trivialement même parfois) de rang 2 alors ...". Êtes-vous sérieux ? Toute la difficulté était là bien sûr, et donnait beaucoup de points à cette question. A méditer.
5. Calculer. Faire des calculs. Vous devriez vous entrainer à faire des calculs. Faites un blitz [1] de calculs avec vos potes. Dans le métro, au petit-déjeuner, dans la file du CROUS, pendant la pause slow en boite, quand vous courez sur un tapis ... Calculez, calculez !
6. Posez des questions. Vos chargés de TD sont là pour ça. Autant de questions que nécessaire pour ne garder aucune incompréhension. On ne comprend jamais aussi vite tout seul, laissez toute fierté de coté.

---

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Blitz_(échecs)`

7. Il y'a une grosse différence entre savoir faire et faire. Tout le monde sait courir le semi-marathon de Vincennes : il suffit de venir au départ et au top, lancer la première jambe, puis la deuxième, puis la première, etc.. en gérant la rapidité entre les lancers. Facile. Qui termine un semi-marathon facilement et efficacement (en par exemple, moins d'1h37) ? Pas grand monde, sans un entrainement efficace et circonstancié. A méditer.
8. Ne croyez pas que les maths sont scindées en matières. Les maths sont cumulatives, et tout ce que vous avez appris les années précédentes ou dans les autres cours de l'année peut-être utilisé et exigé sans modération (l'inégalité de Hölder, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et ses copains, par exemple).
9. Croire qu'il faut finir l'examen pour avoir une bonne note : faire les exercices 1 et 2 entièrement (c'est à dire appliquer le cours et les résultats du cours) conduisait à la note de 16/20. Souvent vous vous précipitez sur des questions, voulez faire tout vite, passez dès que vous ne savez pas immédiatement, etc. A méditer.
10. **Le plus important d'un partiel ou d'un examen n'est pas la note que vous obtenez, mais les erreurs que vous commettez**. La raison est simple : si vous travaillez régulièrement et avec méthode, vous aurez machinalement une note respectable puisque le principe d'un examen n'est pas de vous piéger mais de vérifier que vous avez compris. Il restera alors quelques petites questions non faites ou alors non réussies, il est temps de les reprendre et de les comprendre. Plusieurs questions de l'examen étaient déjà présentes au partiel (le chameau par exemple, certes transformé en canard ...) et le taux de réussite n'a pas été plus brillant : cela n'est pas normal. Avant d'apprendre de nouvelles choses, il faut s'assurer d'avoir compris ce que l'on sait déjà.

1 Quelques fautes récurrentes et remarques

Exercice 1

Q1. Souvent des imprécisions sur la différentielle seconde de g et h. La différentielle seconde demande deux arguments h et k. Souvent deux matrices ont été données comme réponse, mais sans expliquer ce qu'il faut en faire, ce qui ne répond donc pas à la question...

Q2. La question a été peu traitée (!). Beaucoup de différentielles non-linéaires en h, peu de preuves que la différentielle est continue.

Q5a. Attention à la rédaction, on demandait une CNS.

Q5d. Peu de succés malgré le fait que ce soit une question faite en cours et en TD.

Q6. Pauvre canard. Cela a souvent mené à des choses fausses. La plus courante étant : "Si je coupe deux fois le canard, j'ai deux composantes connexes, alors que cela n'en fait qu'une sur le bretzel" ou du même genre "Si je coupe la tête du canard, j'ai deux composantes connexes, alors que cela n'en fait qu'une sur le bretzel".

Q7. Très peu de preuves que les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ sont les ouverts (c'était dans les TD).

Q9a. Attention, il faut écrire proprement le fait que le gradient est surjectif pour $(x, y) \in S$ et cela a donné lieu à des erreurs de logique. Le raisonnement aurait pu commencer par "si le gradient est nul, alors ..." puis aboutir à une résolution correcte.

Q9c. La dérivée partielle n'a pas souvent fait 24 ... Attention aux calculs.

Q9d. Dommage de s'être arrêté beaucoup trop tôt en chemin sur ce calcul, en se simplifiant la vie il n'est pas si long.

Q9e. De gros problèmes de calculs à nouveau. Attention, λ peut valoir 0.

Exercice 2 La plupart du temps, le calcul des dérivées de $x(t)$ et $y(t)$ est faux. Quand il est juste, la recherche des racines a été difficile, notamment à cause d'une équation de la forme $\cos(t) = \sqrt{3}\cos(2t)$ ... .

Exercice 3

Q1. Erreur vue très souvent : $df_x = Id$. Problème récurrent : ne pas écrire proprement la preuve de l'injectivité de df_x.

Q2. Gros problème : ne pas appliquer correctement le TAF, donnant lieu à une confusion entre x et h. Dans la relation lue très souvent

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \sup_z \|df_z(h)\| \|x - y\|,$$

qui est h ? Dans la relation lue très souvent

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|df_x\| \|x - y\|,$$

il y'a un problème avec x !

Q3a. Erreur très fréquente $\|A^{-1}\| = \|A\|^{-1}$. C'est vrai que cela serait super pratique pour le conditionnement en analyse numérique !

Exercice 4

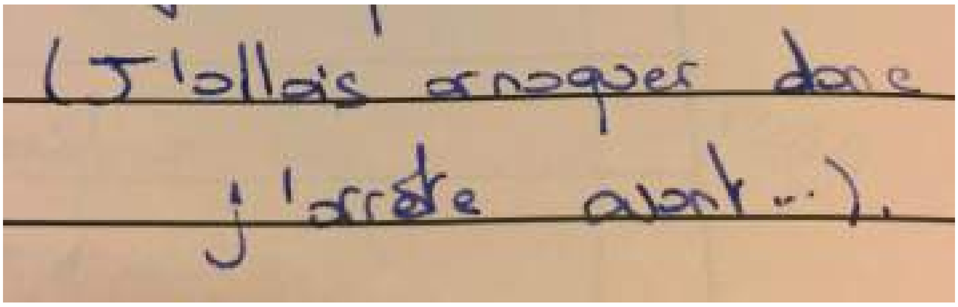
Q2. Le plus gros problème de cet examen : la preuve du rang de la Jacobienne. C'est une affaire de mineurs et ce n'est pas une affaire mineure.

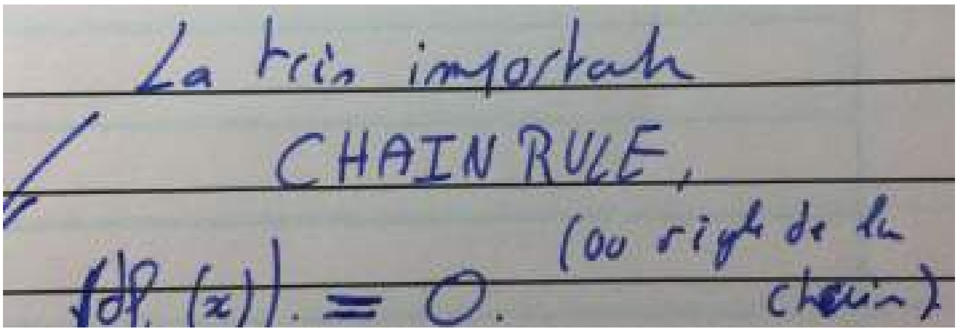
Q3a. Beaucoup de calculs de Hessienne ! ! C'est affreux comme fonction, on peut penser à faire plus efficace ...

Q3a. Erreur concernant la signature : la fonction F atteint un maximum en $(0, 0)$ donc la Hessienne est définie négative.

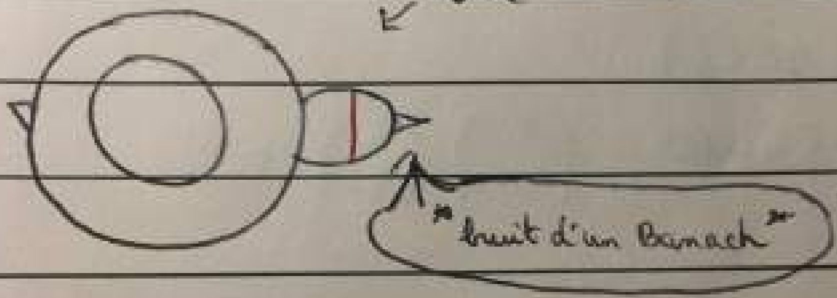
2 Quelques belles pensées et fautes importantes

2.1 Les belles pensées ...





6) vue du dessus d'...



D'après le Big Thm des extremas

C'est pas assez efficace

b) il y a écart monoe. il faut donc utiliser le lemme de monoe. Voilà.

Bien joué !

C'était la dérivée qu'il fallait faire...

$\frac{8-3\sqrt{3}}{}$

OMG

Exercice 2. Alors ça plane pour vous ? pas beaucoup...

FIGURE 1 – E.T. téléphone maison ?

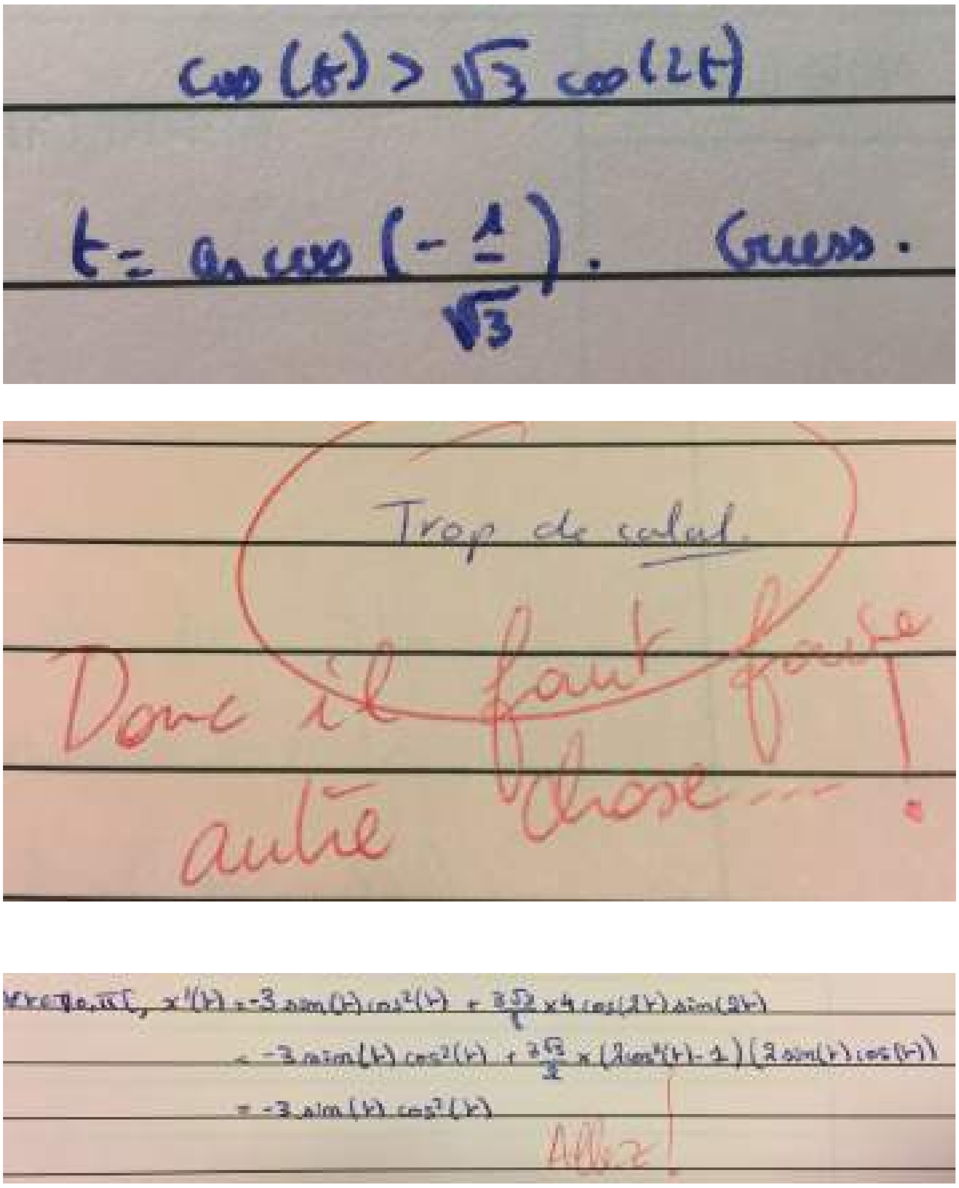
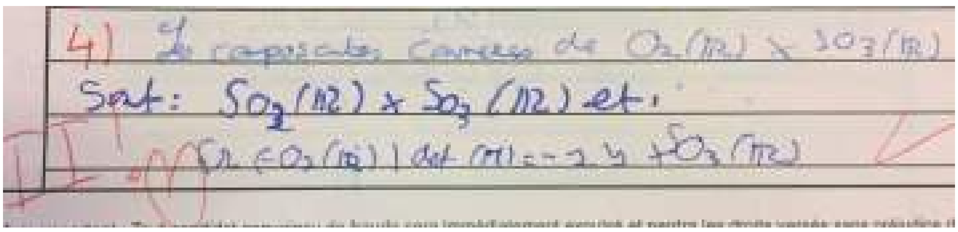
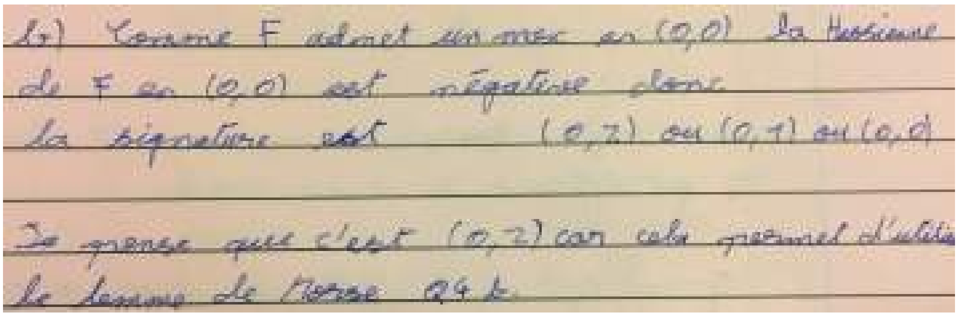
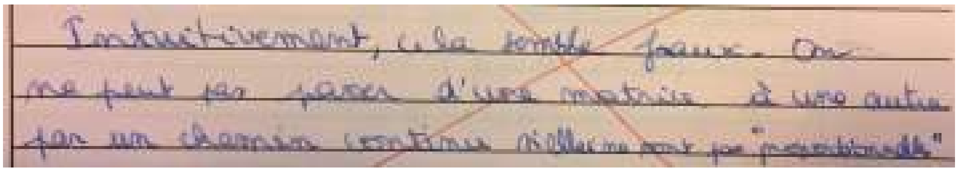


FIGURE 2 – Mais ... pourquoi s'arrêter ?







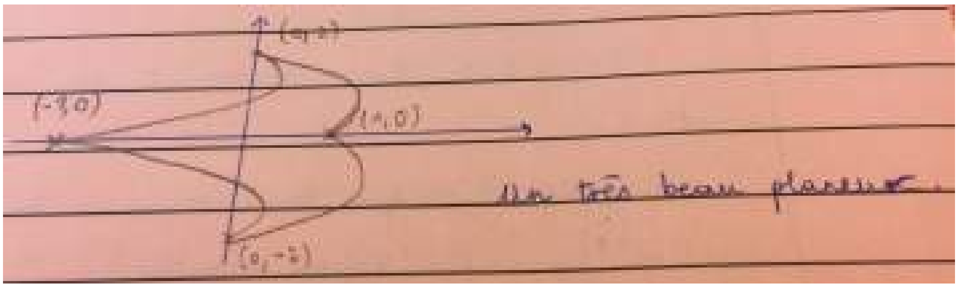


Figure 3 – J'étais plus que tout émotionné ! ♡

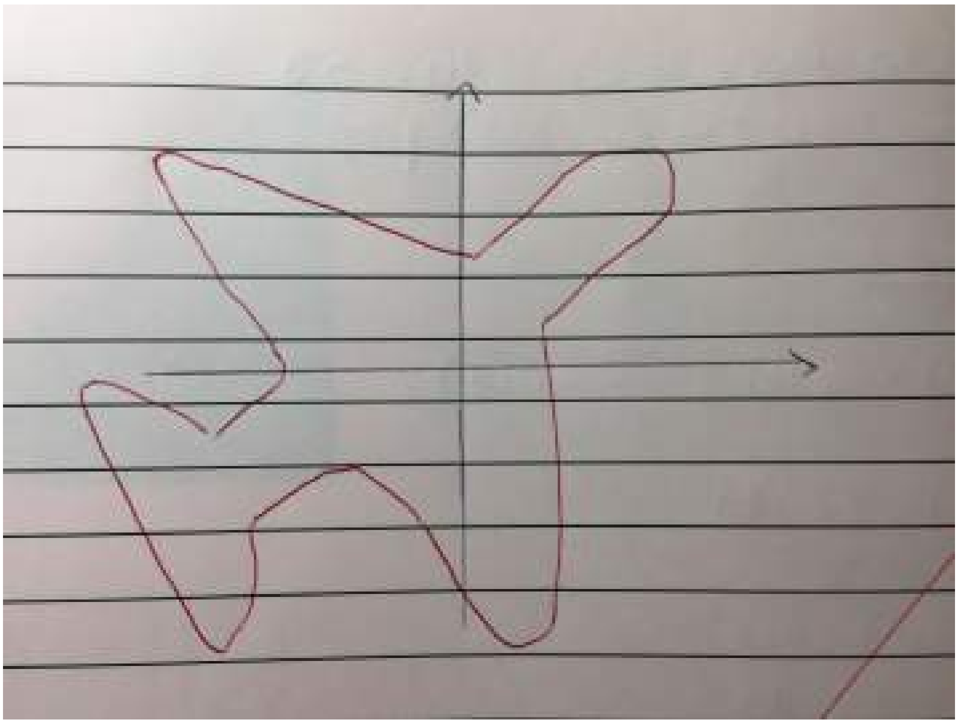


Figure 4 – Ca plane bien !

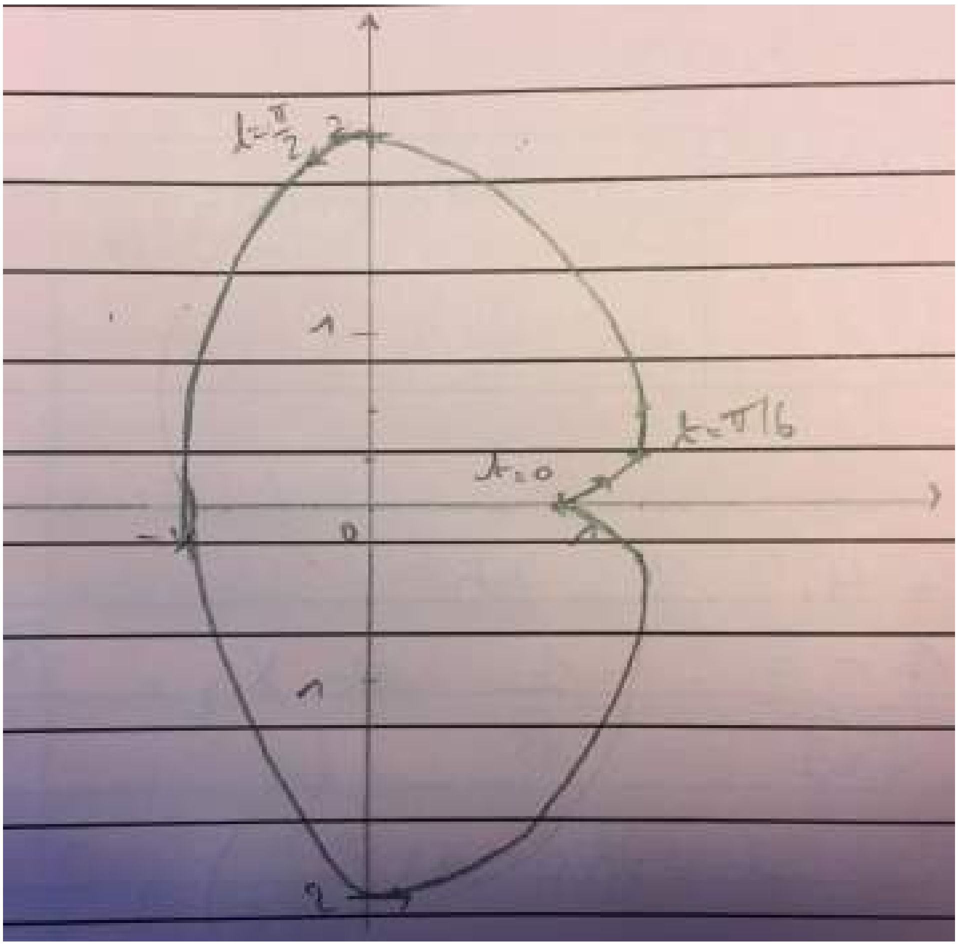


Figure 5 – Pacman on stage !

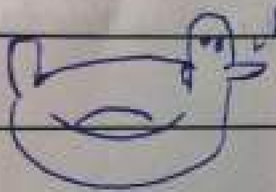
2.2 Ça canarde ...

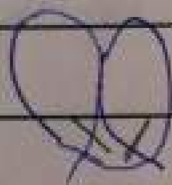
Non car bouée de canard n'est pas homéomorphe à un bretzel. Si on réalise deux coupes distinctes sur la partie thorique du canard (pas sa tête ni sa queue)

On a que le canard admet deux composantes connexes. Alors que pour toute disposition de découpes dans le bretzel le bretzel est toujours connexe (le bretzel est homéomorphe à un 3-thore)

Si on coupe les deux "petits bouts" du bretzel il reste une sorte de "peace and love".

6)



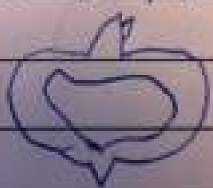


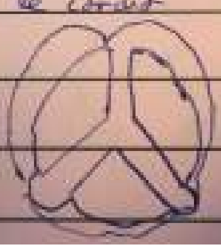
En prenant les 2 plans (\ /) sur reste connexe (car connexe par arcs)
Cependant, n'importe quel découpe de la

Ex 1 (suite)

6 Non si on sectionne la tête du canard (ou la queue ou les) on a 2 composantes connexes alors que n'importe quelle ~~quelle coupe~~ qu'on coupe du bretzel reste connexe
Donc ils ne sont pas homéomorphe

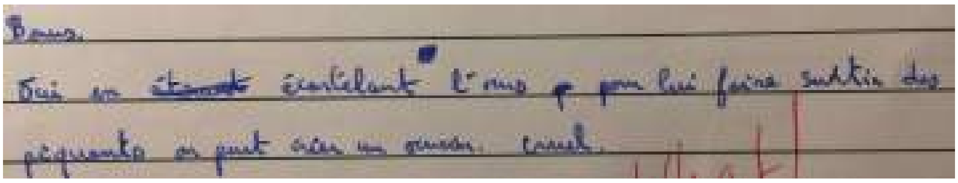
6. Oui, on projette le canard sur un plan.



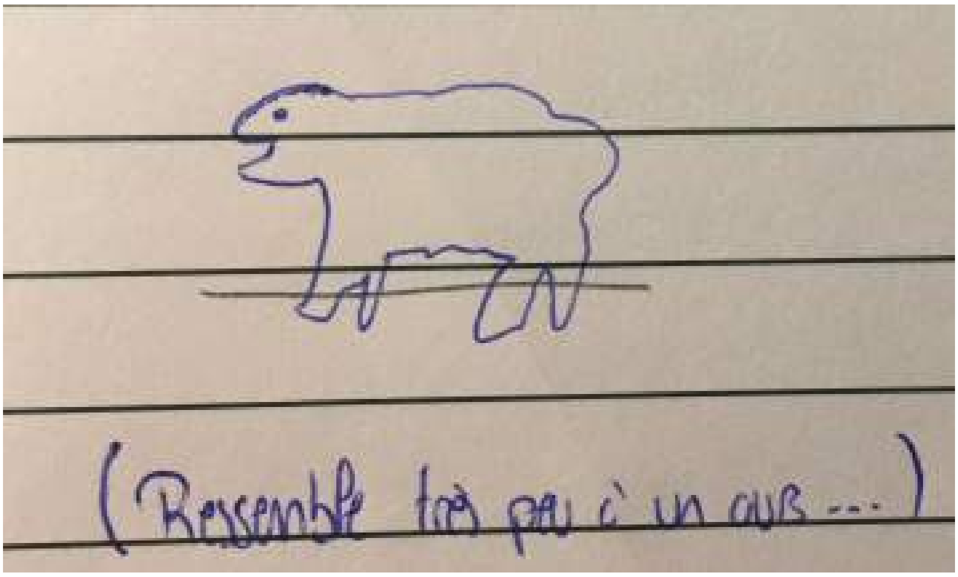


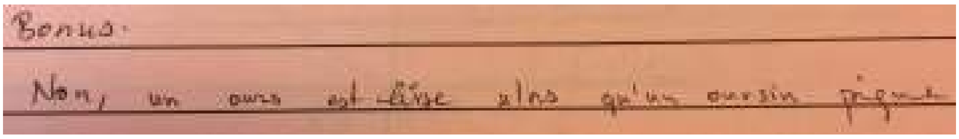
→ homéomorphe
homéomorphe à ...

2.3 L'ours !

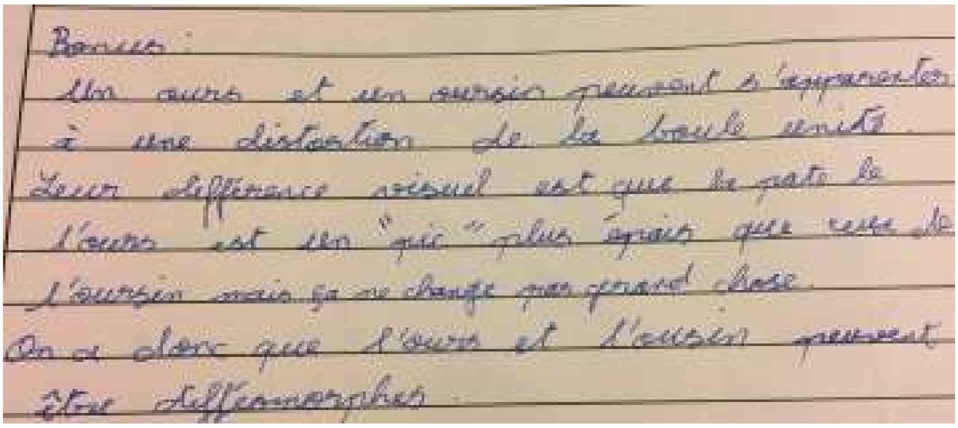


Bonus.
Oui en ~~étirant~~ écartelant l'ours ~~p~~ pour lui faire sortir des piquants on peut avoir un oursin. cruel.

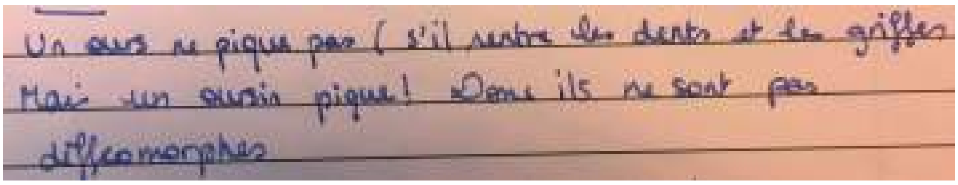




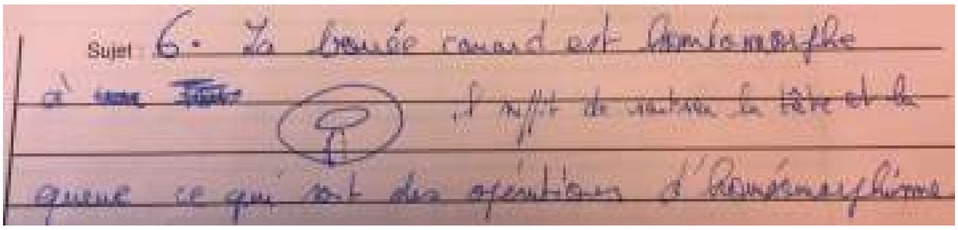
Bonus.
Non, un ours est lisse alors qu'un oursin pique



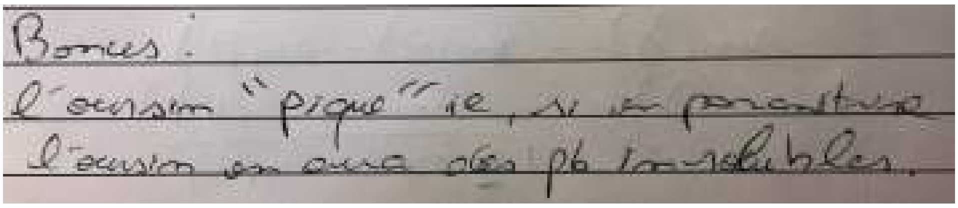
Bonus :
Un ours et un oursin peuvent s'apparenter à une distorsion de la boule unité.
Leur différence visuel est que la peau de l'ours est un "poil" plus épais que celle de l'oursin mais ça ne change pas grand chose.
On a donc que l'ours et l'oursin peuvent être difféomorphes.

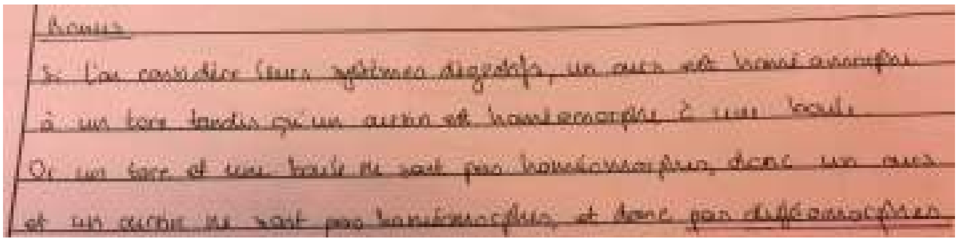


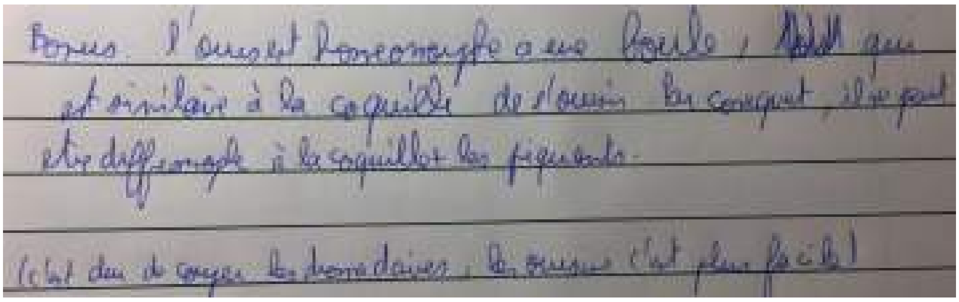
Un ours ne pique pas (s'il rentre les dents et les griffes
Mais un oursin pique ! Donc ils ne sont pas difféomorphes

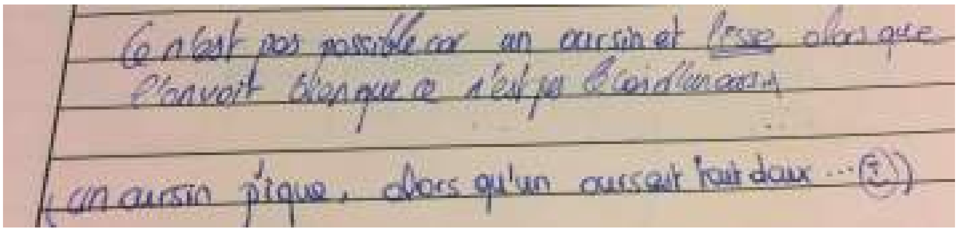


Sujet : 6. La boule cornue est homéomorphe à ~~une~~ ~~tore~~ il suffit de rentrer la tête et la queue ce qui sont des opérations d'homéomorphisme

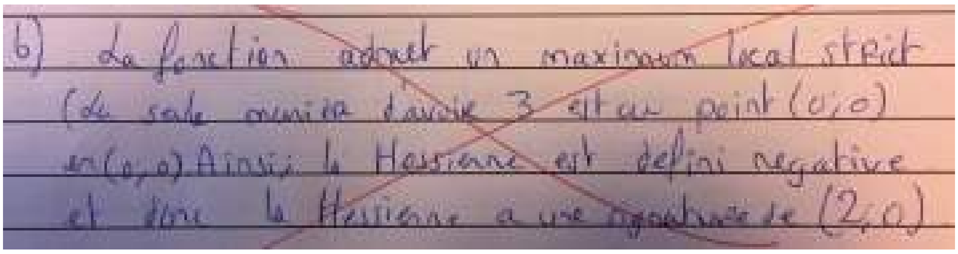

Bonus : l'oursin "pique" ie, si on paramétrise l'oursin on aura des pb insolubles.

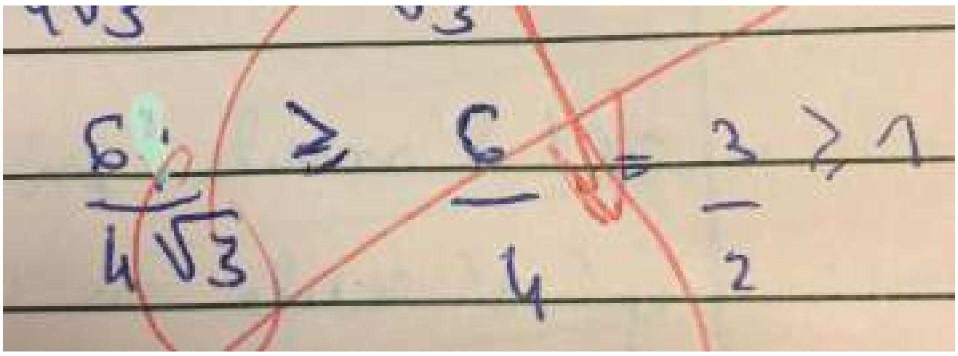

Bonus
Si l'on considère leurs systèmes dégradés, un ours est homéomorphe à un tore tandis qu'un oursin est homéomorphe à une boule. Or un tore et une boule ne sont pas homéomorphes, donc un ours et un oursin ne sont pas homéomorphes et donc pas difféomorphes.


Bonus l'ours est homéomorphe à une boule, [illegible] qui est similaire à la coquille de l'oursin. Par conséquent, il ne peut être difféomorphe à la coquille et les piquants.
(C'est dur de couper les dromadaires, les oursins c'est plus facile)


Ce n'est pas possible car un oursin est lisse alors que l'ours [illegible] alors que ce n'est pas [illegible]
un oursin pique, alors qu'un ours est tout doux ... (?)

2.4 Quelques erreurs récurrentes...


~~b) La fonction admet un maximum local strict (de sorte [illegible] d'avoir 3 et au point (0,0) en (0,0). Ainsi la Hessienne est défini négative et donc la Hessienne a une signature de (2,0)~~


$$\frac{6}{4\sqrt{3}} \geq \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \geq 1$$

1) On considère une matrice A, réelle inversible de taille $n \in \mathbb{N}^*$
Cette matrice peut être diagonalisée et s'écrire sous la forme
$A = P^{-1}DP$, avec D diagonale et avec des valeurs

$$\underbrace{\left(\left[4\left(b^3(t)\,a(t) + a^3(t)\,b(t)\right) + 6\,b(t)^2 a^2(t)\right]\right.}_{\text{linéaire, continue}}$$

7) Les sous variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$ sont les fonctions difféomorphes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$

Les sous-variétés de dimension n de $\mathbb{R}^n$
sont l'ensemble des fonctions telles que
$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
ie $\mathrm{Id}_n(f)$.
et celles de dimension 0 de $\mathbb{R}^n$ sont
l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^n$ telles que
$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
ie $\mathrm{Ker}\{f\} = 0$.

$\| d(f^{-1})_{f(x)} \| = \| (df_x)^{-1} \| \quad \forall x \in U$

$= \| A^{-1} \| = \| A \|$

QUOI