

**Mido - Master MASEF : 8 mars 2017**  
Examen : Machine Learning in Finance<sup>1</sup> : Durée 2 heures

**Quiz [10 points]**

Q1 : Que signifie « SVM » ?

- a) Special Vector Matrix
- b) **Support Vector Machine**
- c) Symmetric Vector Module

Q2 : Si  $(X_i, Y_i)_{i \in [1, n]}$  est un échantillon d'apprentissage comment est définie l'erreur de calibration pour un problème de classification où  $f$  est le classificateur ?

- a)  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} 1_{f(X_i) \neq Y_i}$
- b)  $E[|f(X) - Y|]$
- c) aucun des choix proposés ci-dessus

Q3 : Si  $(X_i, Y_i)_{i \in [1, n]}$  est un échantillon d'apprentissage, parmi les hypothèses suivantes lesquelles font parties des hypothèses toujours faites dans le cours ?

- a) les  $X_i$  sont gaussiennes
- b) **les  $(X_i, Y_i)$  sont toutes de même loi**
- c) **les  $(X_i, Y_i)$  sont toutes indépendantes**
- d) aucun des choix proposés ci-dessus

Q4 : Si  $R_n(f_n)$  est l'erreur de calibration pour le classificateur  $f_n$  associé à l'échantillon  $(X_i, Y_i)_{i \in [1, n]}$  et si l'on note  $R(f_n) = E[1_{f_n(X_{n+1}) \neq Y_{n+1}}]$  quelles propriétés sont vraies ?

- a)  $R_n(f_n) = R(f_n)$
- b)  $R_n(f_n) > R(f_n)$
- c)  **$E[R_n(f_n)] \leq R(f_n)$**
- d) aucun des choix proposés ci-dessus

Q5 : Si il existe  $k$  points de  $\mathbf{R}^d$  qui peuvent être classifiés de toutes les façons possible par une famille de classificateurs  $\mathcal{F}_1$  et pas par  $\mathcal{F}_2$  alors parmi les propositions suivantes lesquelles sont forcément vraies ?

- a)  $VC(\mathcal{F}_1) = k$
- b)  **$VC(\mathcal{F}_1) \geq k$**
- c)  $VC(\mathcal{F}_1) > VC(\mathcal{F}_2)$
- d) aucun des choix proposés ci-dessus

Q6 : Si une famille de classificateurs est paramétrisée par  $p$  paramètres, parmi les assertions suivantes lesquelles sont vraies ?

- a) nécessairement  $VC(\mathcal{F}) < +\infty$

---

1. Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

- b) nécessairement  $VC(\mathcal{F}) = p + 1$
- c) aucun des choix proposés ci-dessus

Q7 : L'inégalité de Vapnik Chervonenkis permet connaissant la complexité du modèle utilisé et l'erreur de calibration réalisée sur l'échantillon :

- a) de calculer la valeur exacte de  $R(f_n)$
- b) de définir un intervalle de confiance pour  $R(f_n)$
- c) de calculer  $P(R(f_n) > R_n(f_n))$
- d) aucun des choix proposés ci-dessus

Q8 : Quelles propositions sont vraies ?

- a) une  $VC$  infinie pour une famille de classificateurs entraîne obligatoirement une bonne qualité prédictive
- b) une  $VC$  infinie pour une famille de classificateurs entraîne obligatoirement une calibration parfaite
- c) la  $VC$  d'une famille de classificateurs de  $\mathbf{R}^d$  est nécessairement inférieure ou égale à  $d + 1$
- d) le nombre de façon de  $\{0, 1\}$ -classifier  $k$  points est de  $2^k$

Q9 : Dans  $\mathbf{R}^d$  pour  $w \neq 0$  on note  $H_{w,b}$  l'hyperplan défini par  $H_{w,b} = \{x \in \mathbf{R}^d, \langle w, x \rangle + b = 0\}$ . Quelles propositions sont vraies ?

- a)  $\forall x \in \mathbf{R}^d d(x, H_{w,b}) = \frac{|\langle w, x \rangle + b|^2}{\|w\|^2}$
- b)  $\forall x \in \mathbf{R}^d d(x, H_{w,b}) = \frac{|\langle w, x \rangle + b|}{\|w\|}$
- c)  $\forall x \in \mathbf{R}^d d(x, H_{w,b}) = \frac{|\langle w, x \rangle - b|}{\|w\|}$
- d) aucun des choix proposés ci-dessus

Q10 : Dans  $\mathbf{R}^d$  pour  $w \neq 0$  on note  $H_{w,b}$  l'hyperplan défini par  $H_{w,b} = \{x \in \mathbf{R}^d, \langle w, x \rangle + b = 0\}$ . Quelles propositions sont vraies ?

- a)  $d(H_{w,b_1}, H_{w,b_2}) = \frac{|b_2 + b_1|}{\|w\|}$
- b)  $d(H_{w,b_1}, H_{w,b_2}) = \frac{|b_2 - b_1|}{\|w\|}$
- c)  $d(H_{-w,b_1}, H_{w,b_2}) = \frac{|b_2 + b_1|}{\|w\|}$
- d) aucun des choix proposés ci-dessus

Q11 : Si vous pouvez classifier parfaitement un échantillon à l'aide des hyperplans  $H_{w_1,b_1}$  avec une marge  $\Delta_1$  et  $H_{w_2,b_2}$  avec une marge  $\Delta_2$  vous avez une bonne raison de choisir l'hyperplan  $H_{w_1,b_1}$  plutôt que  $H_{w_2,b_2}$  si :

- a)  $\Delta_1 < \Delta_2$
- b)  $\Delta_1 > \Delta_2$
- c)  $b_1 > b_2$
- d)  $b_2 > b_1$

Q12 : Si on peut classifier parfaitement un échantillon formé de deux classes à l'aide d'un hyperplan  $H_{w,b}$  de marge  $\Delta$  que dire des enveloppes convexes des

deux classes ?

- a) elles sont séparables
- b)  $\Delta$  est plus grand que la distance entre les deux enveloppes convexes
- c) certains points des enveloppes convexes sont sur les bords de l'hyperplan si il est de marge maximale
- d) aucun des choix proposés ci-dessus

Q13 : Quelle majoration peut on utiliser pour la dimension de Vapnik de la famille  $\mathcal{F}$  d'hyperplans de marges minimum  $\Delta$  classifiant des points à l'intérieur de la boule de centre 0 et diamètre  $D$  de  $\mathbf{R}^d$  ?

- a)  $VC(\mathcal{F}) \leq \min(d, \frac{\Delta}{D}) + 1$
- b)  $VC(\mathcal{F}) \leq \min(d, (\frac{D}{\Delta})^2) + 1$
- c)  $VC(\mathcal{F}) \leq \min(d, (\frac{\Delta}{D})^2) + 1$
- d)  $VC(\mathcal{F}) \leq \min(d, D\Delta) + 1$

Q14 : Le théorème du minimax assure que :

- a)  $\max_{z \in \mathcal{Z}} \left[ \min_{y \in \mathcal{Y}} g(y, z) \right] \leq \min_{y \in \mathcal{Y}} \left[ \max_{z \in \mathcal{Z}} g(y, z) \right]$
- b)  $\min_{y \in \mathcal{Y}} \left[ \max_{z \in \mathcal{Z}} g(y, z) \right] \leq \max_{z \in \mathcal{Z}} \left[ \min_{y \in \mathcal{Y}} g(y, z) \right]$
- c)  $\max_{z \in \mathcal{Z}} \left[ \min_{y \in \mathcal{Y}} g(y, z) \right] = \min_{y \in \mathcal{Y}} \left[ \max_{z \in \mathcal{Z}} g(y, z) \right]$
- d) aucun des choix proposés ci-dessus

Q15 : Quand on résoud par C-SVM une classification  $\{-1, 1\}$  quelles assertions sont vraies ?

- a) d'après le théorème du minimax les solutions  $d^*$  du problème Dual et  $p^*$  du problème Primal vérifient nécessairement  $d^* \leq p^*$
- b) le problème Primal et Dual ont la même solution uniquement si on rajoute les conditions de KKT dans l'écriture du problème Dual
- c) le problème Primal et Dual ont la même solution vue la nature particulière du problème
- d) les conditions de KKT sont automatiquement satisfaites vue la nature particulière du problème

Q16 : Quand on résoud avec un C-SVM une classification  $\{-1, 1\}$  quelles assertions sont vraies ?

- a) tous les vecteurs supports sont toujours classifiés correctement
- b) tous les vecteurs supports sont toujours sur les bords de l'hyperplan solution
- c) l'hyperplan solution est orthogonal à une certaine combinaison linéaire des vecteurs  $x_i$  de l'échantillon

Q17 : Parmi les fonctions suivantes de  $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$  dans  $\mathbf{R}$  lesquelles sont des noyaux ?

- a)  $\exp(-\frac{\|x-y\|^2}{2}) + \exp(-\frac{\|x-y\|^2}{4})$

- b)  $\langle x, y \rangle = \exp(-\frac{\|x-y\|^2}{2})$   
 c)  $\exp(-\frac{\|x-y\|^2}{2}) - \exp(-\frac{\|x-y\|^2}{4})$

On considère dans toute la suite du QCM le noyau  $K_\sigma(x, y) = \exp(-\frac{\|x-y\|^2}{2\sigma^2})$  de  $\mathbf{R}^n$  et  $\phi_\sigma$  telle que :  $\langle \phi_\sigma(x), \phi_\sigma(y) \rangle = \exp(-\frac{\|x-y\|^2}{2\sigma^2})$

Q18 : Quelles assertions sont vraies ?

- a)  $\forall x \in \mathbf{R}^n, \|\phi_\sigma(x)\| = 1$   
 b)  $\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \|\phi_\sigma(x) - \phi_\sigma(y)\| > \sqrt{2}$   
 c)  $\forall (x_i)_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket} \in \mathbf{R}^n \exists w \in \text{Vect}\{\phi_\sigma(\mathbf{R}^n)\}, \|w\| = 1$  et  $\forall i \in \llbracket 1, l \rrbracket, \langle \phi_\sigma(x_i), w \rangle \geq \frac{1}{n}$

Q19 : Quelles assertions sont vraies ?

- a)  $\forall (x_i)_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket}$  la matrice  $[K_\sigma(x_i, x_j)]_{i, j \in \llbracket 1, l \rrbracket}$  est symétrique  
 b)  $\forall (x_i)_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket}$  la matrice  $[K_\sigma(x_i, x_j)]_{i, j \in \llbracket 1, l \rrbracket}$  définit une forme quadratique positive  
 c)  $\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \langle \phi_\sigma(x), \phi_\sigma(y) \rangle \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

Q20 : Les  $(x_i)_{i \in \llbracket 1, l \rrbracket}$  étant des points distincts de  $\mathbf{R}^n$  que dire de la fonction

$$f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \sum_{i=1}^l K_\sigma(x_i, x) ?$$

- a) elle vaut zéro partout  
 b) elle vaut 1 partout  
 c) elle vaut 1 en chaque point  $x_i$  et zéro ailleurs

**Problème :**

On note  $\mathbf{N}$  l'ensemble des entiers naturels et pour tout élément  $z$  de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  on note  $(z^j)_{j \in \mathbf{N}}$  ses composantes et  $H = \{z \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \sum_{j \in \mathbf{N}} (z^j)^2 < +\infty\}$

On note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $H$  défini par  $\langle u, v \rangle = \sum_{j \in \mathbf{N}} u^j v^j$  et on note

$\|\cdot\|$  la norme associée, définie par  $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ .

On note  $\xi$  le vecteur de  $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$  de composantes  $(\xi^i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$

Pour une famille finie de points  $(z_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de  $H$  on considère le problème :

$$(P_\nu) \begin{cases} \inf_{w \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \rho \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{R}^n} \frac{1}{2} \|w\|^2 - 2\rho + \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^n \xi^i & (C1) \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle w, z_i \rangle \geq \rho - \xi^i & \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \xi^i \geq 0 & (C2) \end{cases}$$

[0.5pt]1) Ecrire le Lagrangien  $L(w, \rho, \xi, \alpha, \beta)$  du système où  $\alpha = (\alpha^i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est associé aux  $n$  contraintes (C1) et  $\beta = (\beta^i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est associé aux  $n$  contraintes (C2)

**Solution :**

$$L(w, \rho, \xi, \alpha, \beta) = \frac{1}{2} \|w\|^2 - 2\rho + \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \xi^i - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i [\langle w, z_i \rangle - \rho + \xi^i] - \sum_{i=1}^{i=n} \beta^i \xi^i$$

[1pt] 2) Calculer les dérivées  $\frac{\partial L}{\partial w}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \xi^i}$

**Solution :**

$$\frac{\partial L}{\partial w} = w' - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i z'_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = -2 + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^i} = \frac{\nu}{n} - \alpha^i - \beta^i$$

[0.5pt] 3) On note  $w(\alpha, \beta)$ ,  $\rho(\alpha, \beta)$ ,  $\xi(\alpha, \beta)$  les solutions (dependant de  $\alpha$  et  $\beta$ ) de  $\frac{\partial L}{\partial w} = 0$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$ ,  $\frac{\partial L}{\partial \xi^i} = 0$ .

Calculer l'expression de  $L(w(\alpha, \beta), \rho(\alpha, \beta), \xi(\alpha, \beta), \alpha, \beta)$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  et des  $(z_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .

**Solution :**

$$\begin{aligned} L(w(\alpha, \beta), \rho(\alpha, \beta), \xi(\alpha, \beta), \alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \alpha^i \alpha^j \langle z_i, z_j \rangle - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i \langle w(\alpha, \beta), z_i \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \alpha^i \alpha^j \langle z_i, z_j \rangle \end{aligned}$$

[1pt] 4) Montrez que le problème dual du problème  $(P_\nu)$  est le problème  $(D_\nu)$  défini par :

$$(D_\nu) \begin{cases} \sup_{\alpha \in \mathbf{R}^n} -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \alpha^i \alpha^j \langle z_i, z_j \rangle \\ \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i = 2 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 \leq \alpha^i \leq \frac{\nu}{n} \end{cases}$$

**Solution :**

On a remplacé dans l'expression à minimiser  $w$  par son expression liée à la condition  $\frac{\partial L}{\partial w} = 0$

La condition  $\frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$  donne la première contrainte du problème dual

La condition  $\frac{\nu}{n} - \alpha^i - \beta^i = 0$  couplée aux contraintes  $\alpha^i \geq 0$  et  $\beta^i \geq 0$  est équivalente à la condition  $0 \leq \alpha^i \leq \frac{\nu}{n}$

On note  $\alpha(\nu)$  la solution en  $\alpha$  de  $(D_\nu)$  quand ce problème a une solution (et dans ce cas on admet que le sup est atteint et en un point unique.

5)

[1pt] a) Que se passe-t-il pour les solutions de  $(P_\nu)$  et  $(D_\nu)$  quand  $\nu \rightarrow 0$  et en dessous de quelle valeur  $\nu_L$  de  $\nu$  observe-t-on un phénomène "critique" ?

**Solution :**

Pour  $\nu < 2$  :

- les deux conditions de  $(D_\nu)$  sont incompatibles (ce que peut l'on formuler en disant que la solution de  $(D_\nu)$  est  $-\infty$ ).
- $\forall \lambda > 0$  la condition (C1) continue à être satisfaite en remplaçant  $\rho$  par  $\rho + \lambda$

et tous les  $\xi_i$  par  $\xi_i + \lambda$  et l'expression à minimiser varie alors de  $(\nu - 2)\lambda < 0$ , on peut alors obtenir des valeurs aussi petites que l'on veut et la valeur de  $(P_\nu)$  est  $-\infty$ .

**[1pt]** b) Que se passe-t-il pour les solutions de  $(P_\nu)$  et  $(D_\nu)$  quand  $\nu \rightarrow +\infty$  et au dessus de quelle valeur  $\nu_H$  de  $\nu$  observe-t-on un phénomène "critique"? Que valent les solutions  $\xi(\nu)$  de  $(P_\nu)$  si  $\nu > \nu_H$ .

**Solution :**

Pour  $\nu > 2n$  :

o la condition  $\alpha^i \leq \frac{\nu}{n}$  est automatiquement vérifiée si les autres conditions  $\alpha^i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i = 2$  sont satisfaites donc la valeur du problème  $(D_\nu)$  croît

lorsque  $\nu$  augmente (condition assouplie) puis reste constante ainsi que les  $\alpha^i(\nu)$  lorsque  $\nu$  dépasse  $2n$  (la condition  $\alpha^i \leq \frac{\nu}{n}$  devenant redondante).

o pour  $(P_\nu)$  supposons que  $\xi(\nu) \neq 0$  et soit alors  $l$  tel que  $\xi^l(\nu) > 0$ . Soient alors :  $\xi^*(\nu)$  défini par  $\forall j \neq l, \xi^{*j}(\nu) = \xi^j(\nu)$  et  $\xi^{*l}(\nu) = \frac{1}{2}\xi^l(\nu)$  et  $\rho^*(\nu) = \rho(\nu) - \frac{1}{2}\xi^l(\nu)$ . Alors les contraintes sont toujours satisfaites et la valeur de la fonction à minimiser varie de  $\xi^l(\nu) - \frac{\nu}{2n}\xi^l(\nu) < 0$  ce qui n'est pas possible si le minimum était supposé être déjà atteint. Donc pour  $\nu > 2n$  les solutions sont les solutions du problème sans erreur possible. ( $\xi = 0$ )

**[1pt]** c) On suppose ici  $\nu_L < \nu < \nu_H$ . Comment fait-on une fois les  $\alpha(\nu)$  trouvés pour  $(D_\nu)$  pour calculer l'argument  $\rho(\nu)$  de  $(P_\nu)$  (on suppose que l'*inf* est atteint et en un point unique)?

**Solution :**

On utilise les deux équations de Karush Kuhn Tucker :

$$(KKT1) \quad \alpha_i[\langle w, z_i \rangle - \rho + \xi^i] = 0$$

$$(KKT2) \quad \beta_i \xi^i = 0 \text{ ainsi que l'équation } \frac{\nu}{n} - \alpha_i = \beta_i$$

donc si  $0 < \alpha_i < \frac{\nu}{n}$  (il y en a forcément) on aura :  $\beta_i > 0, \xi^i = 0$  et  $\langle w, z_i \rangle - \rho = 0$  ce qui permet de calculer  $\rho$  (on aura tendance à prendre la moyenne sur toutes les équations disponibles).

**[0.5pt]** d) Pour quelle valeur de  $\alpha_i(\nu)$  un vecteur  $z_i$  peut-il être un vecteur support mal classé pour le problème  $(P_\nu)$ ?

**Solution :**

Pour  $\alpha_i(\nu) = \frac{\nu}{n}$  car alors  $\beta^i = 0$  et l'équation  $\beta_i \xi^i = 0$  ne garantit plus  $\xi^i = 0$

On suppose maintenant que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|z_i\| = 1$  et on considère le problème :

$$(B_\nu) \begin{cases} \inf_{c \in \mathbf{R}^n, R \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{R}^n} 2R^2 + \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \xi^i \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|z_i - c\|^2 \leq R^2 + \xi^i \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \xi^i \geq 0 \end{cases}$$

**[0.5pt]** 6) Ecrire le Lagrangien  $G(c, R, \xi, \alpha, \beta)$  du système  $(B_\nu)$

**Solution :**

$$G(c, R, \xi, \alpha, \beta) = 2R^2 + \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^{i=n} \xi^i - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i (R^2 + \xi^i - \|z_i - c\|^2) - \sum_{i=1}^{i=n} \beta^i \xi^i$$

[1pt] 7) Calculer les dérivées  $\frac{\partial G}{\partial c}$ ,  $\frac{\partial G}{\partial R}$ ,  $\frac{\partial G}{\partial \xi^i}$

**Solution :**

$$\frac{\partial G}{\partial R} = 4R - 2R \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i = 0 \implies \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i = 2$$

$$\frac{\partial G}{\partial c} = -2 \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i (z_i - c)' = 0 \implies \left( \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i \right) c = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i z_i$$

and so from the previous equation  $c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i z_i$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi^i} = \frac{\nu}{n} - \alpha^i - \beta^i = 0 \implies 0 \leq \alpha^i \leq \frac{\nu}{n}$$

We can now rewrite  $G(c, R, \xi, \alpha, \beta)$  as :

$$R^2 \left( 2 - \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i \right) + \sum_{i=1}^{i=n} \xi^i \left( \frac{\nu}{n} - \alpha^i - \beta^i \right) + \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i \|z_i - c\|^2$$

and the first two terms are zero when the conditions are satisfied

[1.5pt] 8) Calculez le problème dual noté  $(C_\nu)$  du problème  $(B_\nu)$

**Solution :**

replacing  $c$  by its expression we get :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i \|z_i - c\|^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i \|z_i\|^2 + \left( \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i \right) \|c\|^2 - 2 \left\langle \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i z_i, c \right\rangle$$

$$= 2 + 2\|c\|^2 - 4\|c\|^2 = 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \alpha^i \alpha^j \langle z_i, z_j \rangle$$

$$(C_\nu) \left\{ \begin{array}{l} \max_{\alpha_i} 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \alpha^i \alpha^j \langle z_i, z_j \rangle \\ \sum_{i=1}^{i=n} \alpha^i = 2 \\ 0 \leq \alpha^i \leq \frac{\nu}{n} \end{array} \right.$$

[0.5pt] 9) Que remarquez-vous ?

**Solution :**

$(C_\nu)$  et  $(D_\nu)$  sont les mêmes problèmes à une constante additive près et il y a une relation directe entre la sphère solution de  $(D_\nu)$  et l'hyperplan solution de  $(P_\nu)$  puisque il apparait que  $c(\nu) = \frac{1}{2} w(\nu)$ .