

Exercice 1 [7pts]:

1) Le Z-score de Altman utilise:

- a) des variables financières relatives à l'entreprise ?
- b) des variables macro économiques ?
- c) s'applique uniquement à des entreprises cotées en bourse ?

2) Pour les modèles à intensité la plupart des études faites par Duffie & Co montrent une relation entre l'intensité historique λ_h et implicite λ_i qui est:

- a) $\lambda_i = \lambda_h$
- b) $\lambda_i = 2 \times \lambda_h$
- c) $\lambda_h = 2 \times \lambda_i$

3) Dans un modèle à intensité pour une obligation de recovery rate R d'intensité de défaut λ et de spread de crédit s on a:

- a) $s \sim (1 - \lambda)R$
- b) $s \sim \lambda(1 - R)$
- c) $s \sim (1 - \lambda)(1 - R)$

4) Quelles sont les relations qui sont vraies pour un processus de défaut τ d'intensité déterministe λ_s continue:

- a) $\forall t > 0, P(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)$
- b) $\forall t > 0, P(\tau > t) = \exp\left(-\int_t^{+\infty} \lambda_s ds\right)$
- c) $\forall t > 0, P(\tau < t + dt | \tau > t) = \lambda_t dt + o(dt)$

5) On considère un CDO formé de 30 bonds de probabilité de défaut pour chaque bond 5% et de corrélation de défaut entre les bonds égale à ρ . Toutes choses étant égales quelles assertions sont vraies si ρ augmente:

- a) le prix de la tranche senior augmente toujours ?
- b) le prix de la tranche equity (junior) diminue toujours ?
- c) le prix de la tranche mezzanine diminue toujours ?

¹Pierre Brugière Université Paris 9 Dauphine

- 6) Toutes choses étant égales par ailleurs la "Distance to Default"
- a) augmente quand la volatilité augmente ?
 - b) diminue quand la volatilité augmente ?
 - c) augmente si la valeur de l'actif augmente ?
 - d) diminue si la valeur de la dette augmente ?

7) Citer deux méthodes pour simuler des variables aléatoires de Bernoulli corrélées

8) Dans un modèle structurel quelle est la loi pour la variable aléatoire \tilde{p} résultante (conditionnellement à laquelle les probabilités de défauts sont des Bernoulli de paramètre \tilde{p}).

9) Quelle utilisation fait-on des lois Beta dans la modélisation des CDOs ?

- 10) Quelles assertions sont vraies dans un modèle à infection:
- a) la corrélation entre les défauts des bonds est toujours positive ?
 - b) on peut calibrer pour obtenir n'importe quelle corrélation positive entre les défauts des bonds ?
 - c) on peut obtenir des corrélations strictement négatives entre les défauts des bonds ?

Exercice 2 [5pts] :

On considère une économie à deux instants (aujourd'hui étant l'instant 0) avec deux états possibles pour l'instant 1. Il y a trois actifs:

- L'actif sans risque, de prix aujourd'hui $B(0) = 100$ et de valeur demain pour les deux états du monde possibles $B^1(1) = B^2(1) = 100$
- L'action d'une compagnie, de prix aujourd'hui $S(0) = 100$ et de valeurs demain pour les deux états du monde possibles $S^1(1) = 28$ et $S^2(1) = 108$
- Le Bond émis par la compagnie, de prix aujourd'hui $C(0)$ et de valeurs demain pour les deux états du monde possibles $C^1(1) = 73$ et $C^2(1) = 103$.

On suppose qu'il n'y a pas d'arbitrage possible au sens mathématique du terme.

[0.5pt] 1) Comment s'énonce l'hypothèse mathématique d'absence d'opportunité d'arbitrage ?

[1pt] 2) Calculer la probabilité risque neutre (π_1, π_2) de l'économie

[0.5pt] 3) Calculer $C(0)$

[1pt] 4) Par quelle stratégie d'investissement peut-on construire un portefeuille qui réplique le Bond émis par la compagnie ?

[0.5pt] 5) Retrouver l'aide de 4) le prix $C(0)$ du bond de la compagnie aujourd'hui

On continue à supposer ici qu'il n'y a pas d'arbitrage possible, et que $C(0)$ vaut la valeur trouvée en 3) mais un trader suppose qu'il y a en fait une possibilité de troisième état possible à l'instant 1 dans laquelle les actifs vaudront : $B^3(1) = 100$, $S^3(1) = 0$ et $C^3(1) = 60$

[1pt] 6) Expliciter une stratégie que ce trader peut mettre en place et qui lui permet de gagner de l'argent dans certains cas et de ne jamais en perdre. (On suppose que tout actif est vendable à découvert).

[0.5pt] 7) le résultat de 6) est-il contradictoire avec l'hypothèse mathématique d'absence d'opportunité d'arbitrage et l'existence d'une probabilité risque neutre ?

Exercice 3 [8pts]:

On considère un modèle à deux instants. On note:

- Z_i des lois normales $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes
- Z une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante des Z_i
- Φ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

◦ $\Phi_{2,\rho}$ la fonction de répartition de la loi binormale $\mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$

Pour $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$ on définit les variables aléatoires de Bernoulli X_i par:
 $X_i = 1 \iff Z_i < \alpha_i + \beta_i Z$. Dans cette modélisation $X_i = 1$ si le Bond i est en défaut à l'instant 1 et $X_i = 0$ sinon. On note $p_i = E[X_i]$

[1pt] 1) exprimer $E[X_i]$ en fonction de α_i, β_i et Φ

[1pt] 2) exprimer $E[X_1 X_2]$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ et $\Phi_{2,\gamma_{1,2}}$, que vaut $\gamma_{1,2}$?

[1pt] 3) montrer que $E[X_1 X_2] = E[\Phi(\alpha_1 + \beta_1 Z)\Phi(\alpha_2 + \beta_2 Z)]$

[1pt] 4) montrer que $\rho(X_1, X_2) = \frac{\text{Cov}(\Phi(\alpha_1 + \beta_1 Z), \Phi(\alpha_2 + \beta_2 Z))}{\sqrt{p_1(1-p_1)}\sqrt{p_2(1-p_2)}}$

5) Montrer que

[1pt] a) $\forall p_1, p_2 \in]0, 1[, \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tels que: $\rho(X_1, X_2) = 0, E[X_1] = p_1$ et $E[X_2] = p_2$

[1pt] b) $\forall \rho \in]0, 1[, \forall p \in]0, 1[, \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tels que: $\rho(X_1, X_2) = \rho$ et $E[X_1] = E[X_2] = p$

[1pt] c) $\forall \rho \in]-1, 0[, \forall p \in]0, 1[, \exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ tels que: $\rho(X_1, X_2) = \rho$ et $E[X_1] = 1 - E[X_2] = p$